จากโจทย์ $$y'' + xy' + y = 0 \tag{1}$$

คำตอบในรูปอนุกรมกำลังของ x

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2}$$

ดังนั้น

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \tag{3}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \tag{4}$$

จาก (3) จะได้ $$xy'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n \tag{5}$$

แทนค่า (5),(4),(2) ลงใน (1) จะได้

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{6}$$

กระจาย (6) ให้อยู่ในรูปผลบวก

$$a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + 5a_4 x^4 + 6a_5 x^5 + \ldots$$

$$+(2)(1)a_2 + (3)(2)a_3 x + (4)(3)a_4 x^2 + (5)(4)a_5 x^3 + \ldots = 0 \tag{7}$$

ในการแก้สมการจะให้ผลรวมของส.ป.สในเทอมที่ x ยกกำลังค่าเดียวกันมีค่าเป็น 0 จะได้

$$\begin{aligned}
a_0 &= -2a_2 \\
a_1 &= -3a_3 \\
a_2 &= -4a_4 \\
a_3 &= -5a_5 \\
a_4 &= -6a_6 \\
&\vdots \\
a_n &= -(n+2)a_{n+2}
\end{aligned}$$

สูตรเวียนบังเกิด (Recursion formula) คือ $a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+2}$