บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน เปรียบเทียบความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน และศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ผู้วิจัยแบ่งการนำเสนอผลในบทนี้เป็น 5 ตอนตามลำดับดังนี้

1. ความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย
2. ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด
3. การเปรียบเทียบความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน
4. การเปรียบเทียบความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน
5. ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 1 ความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย

แบบสอบประเมินความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยประกอบด้วยปัญหา 5 ข้อ ผู้วิจัยเรียกว่าปัญหา “การจัดกลุ่มตัวเลข” “การจัดกลุ่มรูป” “การตั้งคำถามเรื่องนม” “พื้นที่” และ “เกม 24” ตามบริบทของสถานการณ์ของปัญหานั้น ๆ การนำเสนอในส่วนนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลรายข้อ โดยแต่ละข้อกล่าวถึงประเด็นต่าง ๆ อันประกอบด้วย คำตอบทั้งหมด คำตอบที่แตกต่าง คำตอบที่ไม่ได้คะแนน ผลสะท้อนและข้อสังเกต ความคล่องในการคิด และความยืดหยุ่นในการคิด

ปัญหา "การจัดกลุ่มตัวเลข"

สิ่งที่กำหนดให้เป็นเลข 12 จำนวนชุดหนึ่งซึ่งมีคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์และคุณสมบัติอื่นหลายประการร่วมกัน เลขทั้ง 12 จำนวนที่กำหนดให้ได้แก่ 4 5 6 9 12 15 16 19 23 25 32 และ 36 คำสั่งบอก "ให้จัดกลุ่มตัวเลขที่กำหนดให้ตามเกณฑ์หรือคุณสมบัติร่วมบางอย่างให้ได้หลาย ๆ แบบมากที่สุด โดยให้นักเรียนบอกเหตุผลในการจัดกลุ่มแต่ละกลุ่มด้วย" ตัวอย่างสำหรับปัญหาข้อนี้เป็นดังนี้ "4 6 12 และ 16 อยู่กลุ่มเดียวกันได้เพราะทั้งสี่จำนวนเป็นจำนวนคู่" (ดูภาคผนวก ข หน้า 99)

ผู้วิจัยวิเคราะห์คำตอบของนักเรียนทั้งหมด จากนั้นจำแนกเกณฑ์ออกเป็น 10 เกณฑ์ และนับจำนวนนักเรียนที่ใช้เกณฑ์ต่าง ๆ ในการจัดกลุ่มตัวเลข ผลเป็นดังนี้

ตาราง 4 จำนวนนักเรียนที่จัดกลุ่มตัวเลขโดยใช้เกณฑ์ต่าง ๆ พร้อมตัวอย่าง

เกณฑ์การจัดกลุ่ม	จำนวนนักเรียน	ตัวอย่าง
1. ภาวะคู่หรือคี่	123	5 9 15 เป็นเลขคี่
2. การมีตัวหารร่วมตัวเดียวกัน	97	6 9 15 หารด้วย 3 ลงตัว
3. จำนวนเฉพาะ	60	5 19 23 เป็นจำนวนเฉพาะ
4. จำนวนหลักของตัวเลขเท่ากัน	33	4 5 6 9 เป็นเลขโดด 12 15 16 อยู่ในหลักสิบ
5. เกี่ยวกับหลักของตัวเลข	21	12 19 16 19 มีเลขนำหน้าเป็น 1 12 16 32 36 ลงท้ายด้วยเลขคู่
6. มาก/น้อยกว่าค่าคงที่ค่าหนึ่ง	17	23 25 32 36 มากกว่า 20 ขึ้นไป 12 15 16 19 อยู่ระหว่าง 11–20
7. เป็นตัวหารของจำนวน	12	4 6 12 เป็นตัวประกอบของ 36
8. จำนวนกำลังสอง	3	4 9 25 36
9. เศษเหลือจากการหาร	2	12 32 หาร 5 เหลือเศษ 2 เท่ากัน
10. มีตัวหารร่วมมากกว่า 1 ตัว	2	6 36 นำ 2 หรือ 3 มาหารได้ 16 12 36 นำ 2, 3, 4 ไปหารได้

* จำนวนนักเรียนที่ใช้ในการวิเคราะห์ n=123

ประเด็นสำคัญจากการตรวจและให้คะแนนในข้อนี้มีหลายประเด็นดังนี้

คำตอบที่แตกต่าง คำตอบที่ไม่ค่อยมีใครนึกถึง เช่น “12 32 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะนำ 5 หาร เหลือเศษ 2 เท่ากัน”, “12 23 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะถ้าประมาณค่าได้น้อยกว่าตัวของมัน”, “ทั้งหมดเป็นจำนวนนับ”, “5 9 19 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะนำ 3 ไปคูณได้จำนวนคี่”, “4 5 6 9 12 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะนำ 0 ไปคูณแล้วได้ 0”, หรือ “4 5 6 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะถ้ายกกำลังสองแล้วมีผลลัพธ์อยู่ในตัวเลขที่กำหนด” เป็นต้น สำหรับคำตอบที่นำไปสู่มโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวนกำลังสอง (square number) นับว่าเป็นคำตอบที่แสดงออกถึงความช่างสังเกตและความริเริ่ม โดยนักเรียนเขียนอธิบายว่า “6 36 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะถ้าเราเอา 6 ไปหาร 36 ได้ = 6, 5 25 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะถ้าเราเอา 5 ไปหาร 25 ได้ = 5, 4 16 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะถ้าเราเอา 4 ไปหาร 16 ได้ = 4”

คำตอบบางคำตอบก็ถือว่าเป็นคำตอบที่ผู้วิจัยอนุโลมให้คะแนน คำตอบเหล่านี้แสดงออกถึงความคิดแตกต่างในเชิงคณิตศาสตร์ที่ไม่ซ้ำใคร เช่น “19 23 32 36 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะ 23–19 = 36–32 = 4”, “16 19 23 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะ 16 ห่าง 19 อยู่ 3 ตัวเลข 19 ห่าง 23 อยู่ 4 ตัวเลข” และ “4 5 6 14 15 16 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะมีตัวเลขด้านหลังคล้ายกัน” เป็นต้น

คำตอบที่ไม่ได้คะแนน ผู้วิจัยจัดประเภทของคำตอบเหล่านี้ออกเป็น 6 ประเภท แต่ละประเภทมีตัวอย่างประกอบด้วยดังนี้

1. คำตอบซึ่งใช้ตัวเลขที่ไม่ได้จัดไว้ให้ เช่น “3 7 5 9 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะทั้งสี่จำนวนเป็นเลขคี่” คำตอบนี้ถือว่าผิดเงื่อนไขของปัญหาเพราะ 3 และ 7 อยู่นอกเหนือจากตัวเลขที่กำหนด ผู้วิจัยตีความว่านักเรียนอาจลืมเงื่อนไขที่กำหนด แต่ก็น่าแปลกใจที่เหตุการณ์นี้ยังเกิดขึ้นทั้ง ๆ ที่ในระหว่างการทดสอบผู้วิจัยได้ย้ำถึงเงื่อนไขนี้ให้นักเรียนฟังแล้ว โดยพูดว่า “อย่าลืมนะครับ ตัวเลขที่ใช้ต้องมาจากตัวเลขสิบสองจำนวนในโจทย์เท่านั้น” นอกจากนี้ผู้วิจัยพบว่าบางคำตอบไม่ใช้ตัวเลขที่กำหนดแม้แต่ตัวเดียว เช่น “14 21 28 35 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะ 7 หารได้ลงตัว” หรือ “1000 2000 3000 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะอยู่ในหลักพันเหมือนกัน” (ดูตัวอย่างในภาคผนวก ค หน้า 127) อีกคำอธิบายหนึ่งของเหตุการณ์นี้นอกเหนือจากการลืมแล้ว อาจเป็นไปได้ว่านักเรียนไม่ได้ลืมแต่ตั้งใจและพยายามที่จะหาคำตอบให้ได้มากที่สุดและแปลกแตกต่างที่สุดโดยไม่ได้คำนึงว่าคำตอบที่สร้างขึ้นจะได้หรือไม่ได้คะแนน

2. คำตอบที่ไม่เป็นมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น “4 5 6 9 12 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะอยู่แถวเดียวกัน” (ดูปัญหาในภาคผนวก ข หน้า 99) หรือ “6 12 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะถ้าดูนาฬิกาเลข 12 ตรงกับ 6” หรือ “6 9 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเลข 6 หัวลง เลข 9 หัวขึ้น”

3. คำตอบซึ่งมีสมาชิกบางตัวในกลุ่มไม่เข้าเกณฑ์ เช่น “4 5 9 12 19 23 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะทั้งหมดเป็นจำนวนเฉพาะ” แต่ 4 9 และ 12 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ หรือ “5 9 15 19 23 25 32 36 เป็นจำนวนคี่” แต่ 32 และ 36 ไม่ใช่จำนวนคี่

4. คำตอบที่เกิดจากความเข้าใจนิยามที่คลาดเคลื่อน เช่น “12 15 16 19 23 25 32 36 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นเลขโดด”, “6 9 12 15 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นเลขจำนวนคละ” หรือ “4 12 16 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นตัวประกอบของ 4” ผู้วิจัยคาดว่ามโนทัศน์ของคำว่า “เลขโดด” และ “จำนวนคละ” ของนักเรียนน่าผิดไปจากสากล ส่วนนักเรียนที่ใช้คำว่า “ตัวประกอบ” ผิดตำแหน่งก็อาจเป็นเพราะการจำนิยามของคำคลาดเคลื่อนไป ที่ถูกต้องควรเป็น 4 เป็นตัวประกอบของ 4 12 16

5. คำตอบที่ไม่ได้แสดงถึงลักษณะร่วมของสมาชิกทั้งหมดในกลุ่ม เช่น “16 เป็นเลขคู่”, “12 36 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะ 12 หาร 36 ลงตัว”, “5 15 25 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะมี ห.ร.ม. ตัวเดียวกัน”, “4 5 9 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะ 4+5=9” หรือ “4 5 6 15 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะบวกกันได้ 30” คำตอบเหล่านี้ไม่ได้คะแนนเพราะไม่ได้แสดงถึง “การมีเกณฑ์หรือคุณสมบัติร่วม” แต่เป็นแค่เพียงการแสดงถึง “ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนในกลุ่ม” เท่านั้น

6. คำตอบที่ไม่แสดงความชัดเจนของเหตุผล เช่น “4 6 9 12 15 16 25 32 36 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นตัวประกอบ” หรือ “15 32 36 25 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นเลขคล้ายกัน” ลักษณะของคำตอบทั้งสองไม่ได้คะแนนเพราะไม่ทราบได้ว่านักเรียนหมายถึงตัวประกอบของอะไร และตัวเลขคล้ายกันอย่างไร

ผลสะท้อนและข้อสังเกต ประเด็นเรื่องการให้เหตุผลของนักเรียน ผู้วิจัยพบว่าบางกรณีนักเรียนใช้ภาษาในการอธิบายถึงสิ่งเดียวกันด้วยคำหรือข้อความที่ต่างกัน เช่น นักเรียนคนหนึ่งใช้เกณฑ์จำนวนกำลังสองและบอกว่า “4 9 25 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะทั้งสามจำนวนนี้หารซ้ำ 2 ครั้ง เช่น 2x2=4” หรือแทนที่จะบอกว่า “จำนวนเฉพาะ” นักเรียนอธิบายว่า “เป็นจำนวนที่ไม่มีอะไรหารได้นอกจาก 1 และตัวมันเองเท่านั้น” มโนทัศน์ของ “การหารลงตัว” มีความหลากหลายของการอธิบายต่าง ๆ ได้แก่ เป็นตัวประกอบ, เพิ่มทีละเท่ากัน, ห่างเท่ากัน, หรือ อยู่แม่สูตรคูณเดียวกัน ส่วนมโนทัศน์ของ “พหุคูณ” และ “ตัวประกอบ” นักเรียนตอบว่า “16 32 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะทั้งสองจำนวนคูณมาจาก 16”, “4 6 9 12 36 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะนำ 36 ตั้งหารด้วยจำนวนเหล่านี้ได้” หรือแทนที่จะบอกว่า 12 15 16 19 “มากกว่าสิบ” นักเรียนบอกว่า “อ่านขึ้นต้นว่าสิบ” เป็นต้น ในประเด็นนี้น่าสนใจว่าบ่อยครั้งที่นักเรียนไม่ใช้คำศัพท์ทางคณิตศาสตร์แต่ใช้ภาษาของตนเองในการสื่อสารแทนซึ่งก็น่าจะเป็นปรากฏการณ์ปกติสำหรับนักเรียนประถมศึกษา

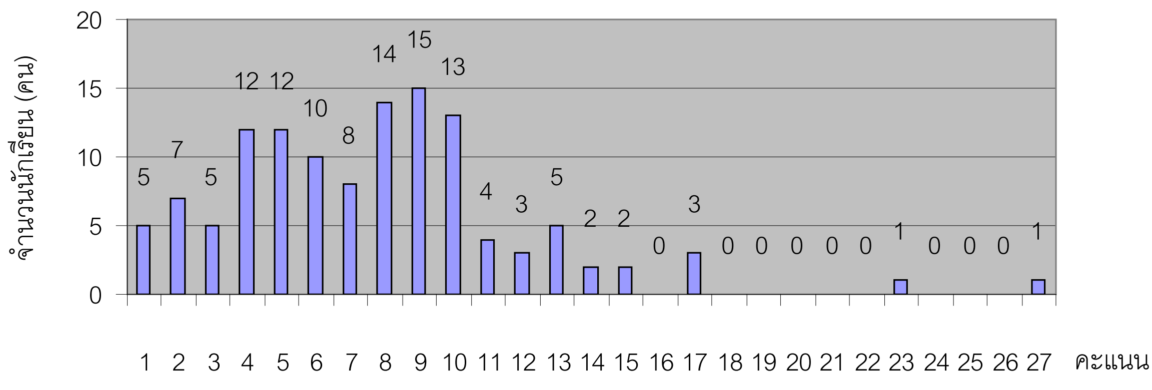
นักเรียนบางคนทราบดีว่าจำนวนคำตอบที่ทำได้มีผลกับคะแนนที่จะได้รับ ดังนั้นเพื่อให้ได้จำนวนคำตอบมากที่สุด นักเรียนจึงสร้างคำตอบที่มีจำนวนสมาชิกในกลุ่มน้อย ๆ เพื่อจะได้คำตอบจำนวนมาก ตัวอย่างเช่น นักเรียนคนหนึ่งจัดกลุ่ม 5 9 15 19 23 25 โดยใช้เกณฑ์จำนวนคี่และเกณฑ์อื่น ๆ อีกหลายเกณฑ์ ได้คะแนนความคิดคล่องไม่มากและได้คะแนนความคิดยืดหยุ่นมากกว่า 1 ขณะที่นักเรียนอีกคนใช้เกณฑ์เดียวคือภาวะคู่หรือคี่ แต่ให้คำตอบหนึ่ง ๆ มีสมาชิกเพียง 2 ตัว จนได้คะแนนความคิดคล่องมาก แต่คะแนนความคิดยืดหยุ่นเป็น 1 จะเห็นว่าวิธีการคิดของนักเรียนสองคนนี้แตกต่างกัน ดังนั้น ประเด็นที่เป็นปัญหาที่ต้องพิจารณาให้ละเอียดรอบคอบคือชุดคำตอบแบบใดในสองคนนี้ที่แสดงออกถึงความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยมากกว่ากัน ผู้วิจัยคิดว่าควรมีเกณฑ์การประเมินที่ละเอียดกว่าที่ใช้อยู่ และควรพิจารณาเพิ่มคำอธิบายชี้แจงลงในคำถามให้ชัดเจนด้วยว่าคำตอบที่คาดหวังเป็นอย่างไร

คำตอบกลุ่มหนึ่งที่ไม่ได้แสดงถึง “การมีคุณสมบัติร่วม” แต่เป็นแค่เพียงการแสดงถึง “ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่ติดกัน” เท่านั้น เช่น คำตอบ “6 9 12 15” หากให้เหตุผลว่า “เพราะเพิ่มขึ้นทีละ 3” แบบนี้จะเรียกว่า “ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่ติดกัน” แต่หากให้เหตุผลว่า ”เพราะมี 3 เป็นตัวหารของทุกจำนวน” แบบนี้จะเรียกว่า “การมีคุณสมบัติร่วม” Haylock (1985) อธิบายว่าการคิดแบบ “ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่ติดกัน” เรียกว่า sequential generalization ส่วนการคิดแบบ “การมีคุณสมบัติร่วม” เรียกว่า global generalization เกี่ยวกับเรื่องนี้มีงานวิจัยที่ชี้ว่าเด็กที่มีความคิดสร้างสรรค์ทั่วไปสูงมักจะเป็นพวกที่คิดแบบ global generalization มากกว่าที่จะเป็นแบบ sequential generalization (Anderson & Cropley, 1966; Wallach & Kogan, 1965 cited in Haylock, 1985) และจากงานวิจัยเรื่องความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของ Haylock เอง เขาก็พบว่านักเรียนที่มีความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์สูงมักจะคิดแบบ global generalization เช่นกัน ในทางคณิตศาสตร์ถือกันว่าการคิดแบบ global generalization มีพลังอำนาจ (power) และมีประโยชน์มากกว่าการคิดแบบ sequential generalization อีกทั้งการคิดแบบ global generalization บังคับให้ต้องใช้ความคิดอย่างยืดหยุ่นซึ่งตรงกับคุณลักษณะของการคิดเชิงสร้างสรรค์ จากความรู้ตรงนี้ทำให้ทราบว่าการคิดทั้งสองแบบนี้มีระดับคุณภาพแตกต่างกัน

ความสะเพร่าหรือพลั้งเผลอหรือความเข้าใจผิดทำให้พบคำตอบซึ่งมีสมาชิกบางตัวในกลุ่มไม่เข้าเกณฑ์ เช่น “4 5 9 19 23 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นจำนวนเฉพาะ” แต่ความจริงแล้ว 4 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ หรือ “5 9 15 19 23 25 32 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นจำนวนคี่” แต่ 32 ไม่ใช่จำนวนคี่ เรื่องนี้สำคัญเพราะคำตอบเหล่านี้ได้สร้างความลำบากในการตัดสินใจแก่ผู้ตรวจว่าจะให้

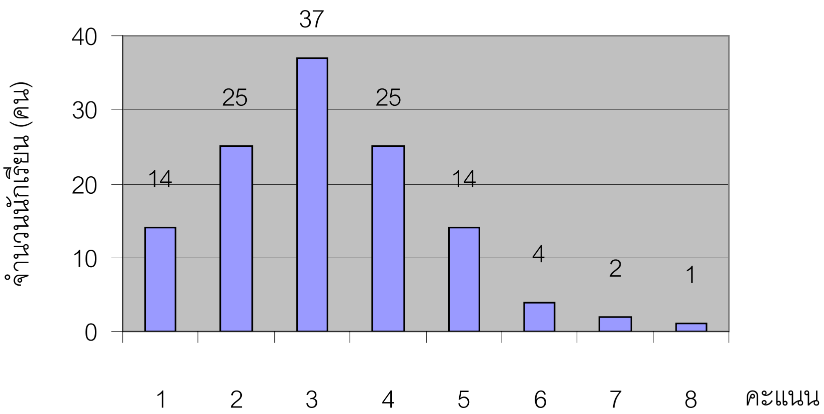
หรือจะไม่ให้คะแนน ถ้าเกณฑ์การตรวจมีความยืดหยุ่นบ้างโดยมองว่าความไม่ถูกต้องเกิดจากความพลั้งเผลอเพียงเล็กน้อยก็จะได้คะแนน แต่หากยึดเกณฑ์ของความถูกต้องเชิงคณิตศาสตร์อย่างจริงจังก็จะต้องเป็นคำตอบที่ไม่ได้คะแนน ระดับความเข้มงวดของการตรวจคะแนนทำให้การประเมินผลการคิดแบบอเนกนัยออกมาแตกต่างกันได้ ในเรื่องนี้ Haylock (1985) ชี้ให้เห็นประเด็นของความขัดแย้งระหว่างความคิดสร้างสรรค์กับความถูกต้องสมบูรณ์ (accuracy) โดยอธิบายว่าถึงแม้ธรรมชาติของคณิตศาสตร์มีความแน่นอนชัดเจนด้านเนื้อหาสาระที่ต้องคงความถูกต้องสมบูรณ์ไว้ แต่การให้ความสำคัญและเน้นไปที่ความถูกต้องสมบูรณ์มากจนเกินไปอาจส่งผลทำให้นักเรียนรับรู้และเข้าใจว่าครูผู้สอนกำลังบอกพวกเขาว่าความถูกต้องสมบูรณ์ต้องอยู่เหนือและต้องมาก่อนความคิดสร้างสรรค์เสมอ เมื่อเป็นอย่างนี้ นักเรียนจะคิดว่าต้องคอยระมัดระวังจนถึงขั้นระแวงไม่ให้เกิดความผิดพลาดอยู่ตลอดเวลา นักเรียนจะไม่อยากเผชิญกับความเสี่ยงเพื่ออยู่ในสถานะ “ปลอดภัยไว้ก่อน” นักเรียนจะเลือกใช้ขั้นตอนวิธีที่เรียนมาแล้วเท่านั้นเป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา ทำให้โอกาสที่นักเรียนจะได้ลองคิดอย่างสร้างสรรค์ไม่เกิดขึ้น ในประเด็นนี้เป็นเรื่องที่ครูผู้สอนต้องชั่งน้ำหนักระหว่างความคิดสร้างสรรค์และความถูกต้องสมบูรณ์ทางคณิตศาสตร์

ความคล่องในการคิด เมื่อพิจารณาความคิดคล่องในการจัดกลุ่มตัวเลข พบว่าคะแนนความคิดคล่องสูงสุดเท่ากับ 27 ฐานนิยมเท่ากับ 9 และค่าเฉลี่ยของความคิดคล่องเท่ากับ 7.80 ดังข้อมูลที่ปรากฏในภาพ 11 ซึ่งแปลความได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนแต่ละคนจัดกลุ่มตัวเลขได้ประมาณ 8 กลุ่ม



ภาพ 11 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดคล่องในการจัดกลุ่มตัวเลข

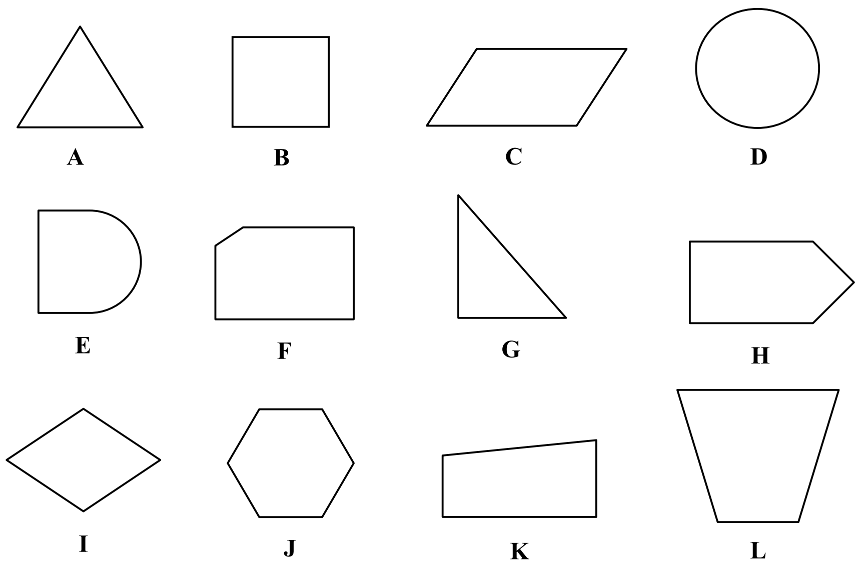
ความยืดหยุ่นในการคิด เมื่อพิจารณาความคิดยืดหยุ่นในการจัดกลุ่มตัวเลข พบว่า คะแนนความคิดยืดหยุ่นสูงสุดเท่ากับ 8 ฐานนิยมเท่ากับ 3 และค่าเฉลี่ยของความคิดยืดหยุ่นเท่ากับ 3.18 ดังข้อมูลที่ปรากฏในภาพ 12 ซึ่งแปลความได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนมีเกณฑ์ในการจัดกลุ่มตัวเลขคนละประมาณ 3 เกณฑ์ที่แตกต่างกัน



ภาพ 12 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดยืดหยุ่นในการจัดกลุ่มตัวเลข

ปัญหา "การจัดกลุ่มรูป"

สิ่งที่กำหนดให้เป็นรูปเรขาคณิตสองมิติ 12 รูป (ดูภาคผนวก ข หน้า 100)



ภาพ 13 รูปเรขาคณิตสองมิติที่กำหนดให้เพื่อการจัดกลุ่ม

คำสั่งบอก “ให้จัดกลุ่มของรูปที่กำหนดให้ตามเกณฑ์หรือคุณสมบัติร่วมบางอย่างให้ได้หลาย ๆ แบบมากที่สุด ขอให้บอกเหตุผลในการจัดกลุ่มแต่ละกลุ่มด้วย” ตัวอย่างสำหรับปัญหาข้อนี้เป็นดังนี้ “รูป B, C, K และ L อยู่กลุ่มเดียวกันได้เพราะทั้งสี่รูปเป็นรูปสี่เหลี่ยม”

ผลการวิเคราะห์คำตอบของนักเรียนทั้งหมดพบว่านักเรียนเข้าใจคำสั่งอย่างดี ทั้งนี้เพราะนักเรียนคุ้นเคยกับคำสั่งจากปัญหาจัดกลุ่มตัวเลขที่ได้ทำแล้วก่อนข้อนี้ ผู้วิจัยจำแนกเกณฑ์ที่นักเรียนใช้จัดกลุ่มรูปได้ประมาณ 10 เกณฑ์ ดังนี้

ตาราง 5 จำนวนนักเรียนที่จัดกลุ่มรูปโดยใช้เกณฑ์ต่าง ๆ พร้อมตัวอย่าง

เกณฑ์หรือคุณสมบัติร่วม	จำนวนนักเรียน	ตัวอย่าง
ชนิดและลักษณะรูปเหลี่ยม		
1. ลักษณะเหลี่ยม/ด้าน	124	F H เป็นรูปห้าเหลี่ยม, D E มีส่วนโค้ง J H F มีจำนวนด้านมากกว่า 4 ด้าน A B I แต่ละด้านยาวเท่ากัน
2. สี่เหลี่ยมคางหมู	39	K L
3. สี่เหลี่ยมด้านขนาน	10	C I
4. มโนทัศน์เกี่ยวกับมุม	68	E H มีมุมกาง 90 องศาอยู่ 2 มุม F H I J L มีมุมป้าน A B มุมทุกมุมเท่ากัน
5. เส้นขนาน	38	C F I B มีเส้นขนาน 2 คู่ A D G ไม่มีเส้นขนานกัน
มโนทัศน์เกี่ยวกับเส้นทแยงมุม		
6. เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก	16	B I
7. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน	14	B I
8. จำนวนเส้นทแยงมุม	13	B H I K L C มีเส้นทแยงมุม A D E ไม่มีเส้นทแยงมุม
9. ใช้สูตรหาพื้นที่เดียวกัน	8	A G หรือ K L
10. การสมมาตร	4	B H L D A มีแกนสมมาตร

* จำนวนนักเรียนที่ใช้ในการวิเคราะห์ n=126

ประเด็นสำคัญที่ได้จากการตรวจและให้คะแนนในข้อนี้มีหลายประเด็นดังนี้

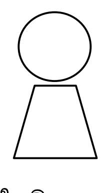
คำตอบที่แตกต่าง คำตอบเหล่านี้มีความถี่ของการตอบน้อยมากโดยแต่ละคำตอบมาจากนักเรียน 1–5 คนเท่านั้น เช่น “A G อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว”, “B I อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน”, “B I อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะคือรูปเดียวกันที่ถูกดันให้เอียง”, “J L อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเมื่อแบ่งครึ่งแล้วมีรูปสี่เหลี่ยมคางหมู 2 รูป”, “H L อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะมีขนาดเท่ากัน 2 มุม”, “ทุกรูปอยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นรูปปิด”, “E G อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมและวงรี” หรือ “A D G อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะไม่มีเส้นขนาน” เป็นต้น บางคำตอบมีมากกว่าหนึ่งลักษณะร่วมในกลุ่มเดียวกัน เช่น “B L I อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นสี่เหลี่ยมที่มีแกนสมมาตร”, “J H อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะมีมุมมากกว่า 4 มุมและมีแกนสมมาตร”, “B C I อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะเป็นรูปสี่เหลี่ยมและใช้สูตรพื้นที่เหมือนกัน” เป็นต้น

คำตอบที่ไม่ได้คะแนน จัดเป็นกลุ่มได้อย่างน้อย 6 กลุ่ม ดังนี้

1. คำตอบที่เกิดจากความสะเพร่า เช่น นับจำนวนด้าน แกนสมมาตร ไม่ครบ

2. คำตอบที่เกิดจากความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน เช่น ความสับสนระหว่างมโนทัศน์ของคำว่า “พื้นที่” กับ “ขนาดของมุม” นักเรียนบางคนให้คำตอบลักษณะนี้ “A G อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะมีพื้นที่ข้างในเท่ากับ 180 องศา”, มโนทัศน์ของคำว่า “แกนสมมาตร” กับ ”เส้นทแยงมุม” ก็พบว่ามีนักเรียนบางคนเข้าใจผิด นักเรียนคนหนึ่งกล่าวถึง “เส้นทแยงมุมของสามเหลี่ยม” แทนที่จะใช้คำว่า “แกนสมมาตรของสามเหลี่ยม” และมีนักเรียนจำนวนหนึ่งตอบว่า “เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานตั้งฉากกัน”

3. คำตอบที่ไม่เป็นมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น “A B C D อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะอยู่บรรทัดเดียวกัน” หากคำตอบไม่เป็นเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์จะไม่ได้คะแนนการคิดแบบอเนกนัยด้านคณิตศาสตร์ สาเหตุที่พบคำตอบประเภทนี้คงเป็นเพราะนักเรียนให้ความสำคัญกับรูปร่างลักษณะภายนอกมากเกินไป อย่างไรก็ตามจินตนาการของนักเรียนบางคนก็น่าสนใจ ผู้วิจัยพบว่านักเรียนหลายคนจินตนาการรูปเรขาคณิตสองมิติเป็นสิ่งของที่นักเรียนพบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน เช่น หลังคาบ้าน ป้ายจราจร นาฬิกา ยาเม็ด ไอติม กระถางต้นไม้ และลูกศร จินตนาการที่ซับซ้อนอันหนึ่ง นักเรียนบอกว่า “ปิ้นหัว L แล้วนำวงกลม D มาใส่เหมือนคนใส่กระโปรง” (ดูภาพ 14)



ภาพ 14 คนใส่กระโปรงในจินตนาการของนักเรียนคนหนึ่ง

4. คำตอบที่ไม่แสดงความชัดเจนของเหตุผล คำตอบจำนวนมากมีเหตุผลไม่เพียงพอที่จะบอกว่าเพราะเหตุใดรูปต่าง ๆ จึงจัดอยู่กลุ่มเดียวกันได้ นักเรียนส่วนหนึ่งเขียนให้เหตุผลสั้น ๆ ว่า “รูป ก และ รูป ข อยู่กลุ่มเดียวกัน” เพราะ “มีลักษณะที่แปลกกว่ารูปอื่น ๆ”, “มีขนาดเท่ากัน”, “มีเส้นผ่าเหมือนกัน”, “มีรูปร่างไม่เหมือนใคร”, “เป็นรูปไม่สมประกอบ”, “สามารถทำเป็นรูปต่าง ๆ ได้อีกมาก” คำตอบประเภทนี้ไม่ได้คะแนน ทั้งนี้เพราะคำตอบของนักเรียนไม่ได้ขยายความว่าลักษณะที่แปลกนั้นคืออะไร ขนาดที่ว่าเท่ากันนั้นคือขนาดของอะไร เส้นผ่าคืออะไร เป็นต้น

5. คำตอบที่ไม่ได้แสดงถึงลักษณะร่วม เช่น “B G อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะ G เป็นส่วนหนึ่งของ B” คำตอบลักษณะนี้ไม่ตรงกับความหมายของการจัดกลุ่มใหม่ (redefinition) ตามกรอบการประเมินความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของ Haylock ที่งานวิจัยเรื่องนี้นำมาใช้

6. คำตอบอื่น ๆ ที่ไม่ได้คะแนน เช่น คำตอบที่เน้นไปที่ปริมาณหรือจำนวนคำตอบโดยไม่สนใจถึงความหลากหลายของความคิด เช่น นักเรียนคนหนึ่งให้คำตอบต่อไปนี้ “F H อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะไม่ใช่รูป 3 เหลี่ยม, F H อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะไม่ใช่รูป 4 เหลี่ยม, F H อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะไม่ใช่รูป 6 เหลี่ยม, J D E อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะไม่ใช่รูป 3 เหลี่ยม, J D E อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะไม่ใช่รูป 4 เหลี่ยม, J D E อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะไม่ใช่รูป 5 เหลี่ยม” คำตอบประเภทนี้ได้คะแนนเพียงบางส่วนเท่านั้น

ผลสะท้อนและข้อสังเกต แม้ว่านักเรียนบางคนจะลากเส้นทแยงมุมหรือแกนสมมาตรลงในรูปที่กำหนดให้เพื่อประกอบการคิด ซึ่งได้ช่วยให้ผู้วิจัยเห็นและเข้าใจวิธีคิดของพวกเขา แต่อย่างไรก็ตามนักเรียนเกือบทั้งหมดไม่ทิ้งร่องรอยการคิดไว้เลย ทั้งนี้นักเรียนอาจจะคิดไปเองว่าห้ามขีดเขียนเพิ่มเติมรูปที่กำหนดให้ก็เป็นได้ การมองด้วยตาเพียงอย่างเดียว (คิดในใจ) น่าจะมีส่วนทำให้การสรุปของนักเรียนผิดพลาดไป เช่น นับแกนสมมาตรได้น้อยกว่าที่มีอยู่จริง หรือสรุปว่าเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานตั้งฉากกัน เป็นต้น ผู้วิจัยคิดว่าหากนักเรียนได้ลากเส้นแกนสมมาตรลงไปในรูป และลากเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน นักเรียนน่าจะทำได้ดีขึ้นและมีข้อผิดพลาดน้อยลง

จากคำตอบที่แสดงเหตุผลการจัดกลุ่มไม่ชัดเจนที่กล่าวมาแล้วนั้น ประเด็นนี้เป็นจุดอ่อนของคำถามข้อนี้ กล่าวคือ สิ่งที่ผู้วิจัยคาดเดาอาจไม่ตรงกับสิ่งที่นักเรียนคิดจริง ๆ ยกตัวอย่างเช่นในกรณีของ นักเรียนคนหนึ่งจัดกลุ่ม B I C อยู่ด้วยกันและให้เหตุผลว่า “ถ้านำมาแบ่งครึ่งจะได้รูปสามเหลี่ยมสองรูป” ผู้วิจัยลังเลที่จะให้คะแนนเพราะไม่ทราบว่านักเรียนคนนี้มีวิธีแบ่งครึ่งในลักษณะใด สิ่งที่นักเรียนคิดไม่มีการกระทำของ “การแบ่งครึ่ง” เขียนกำกับไว้ อีกคำตอบหนึ่งซึ่งคล้ายกัน บอกว่า L A อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะ “ถ้าตัดแล้วมีรูปคล้ายกัน” ผู้วิจัยไม่เข้าใจว่านักเรียน

ตั้งใจที่จะ “ตัด” อย่างไร และจะเกิดรูปที่ “คล้ายกัน” ในลักษณะใด เพราะว่าคำตอบเหล่านี้ไม่ได้คะแนน จึงทำให้ประเด็นนี้เป็นเรื่องสำคัญ คำอธิบายของเรื่องนี้อาจชี้ไปถึงเรื่องของความสามารถในการเขียนสื่อสารหรืออาจเป็นเรื่องของ “การคิดแบบยึดตัวเองเป็นหลัก (egocentric)” นักเรียนบางคนยังใช้ตัวเองเป็นศูนย์กลางในการสื่อสารโดยไม่ตระหนักหรือไม่สนใจว่าข้อความที่สื่อออกไปจะมีความหมายต่อผู้อื่นเหมือนกับที่มีความหมายต่อตัวเองหรือไม่ นักเรียนคิดว่าเขาอ่านเข้าใจโดยไม่สนใจหรือลืมไปว่าคนอื่นไม่ได้อยู่ในบริบทเดียวกันกับเขา (ศรีเรือน แก้วกังวาล, 2545, หน้า 223-224) เมื่อนักเรียนอายุมากขึ้นมีพัฒนาการมากขึ้น ปัญหาในประเด็นนี้น่าจะค่อย ๆ หายไป

การพบลักษณะคำตอบที่ไม่สมบูรณ์ทำให้เป็นอุปสรรคอย่างมากสำหรับการประเมินความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยในด้านการจัดกลุ่มใหม่ ผู้วิจัยคิดว่าควรต้องปรับเปลี่ยนวิธีการถามคำถามลักษณะนี้เสียใหม่ โดยแทนที่ถามว่า “ให้นักเรียนจัดกลุ่มรูปที่กำหนดให้ตามเกณฑ์หรือคุณสมบัติร่วมบางอย่างให้ได้หลาย ๆ แบบมากที่สุด และให้บอกเกณฑ์การจัดกลุ่มแต่ละกลุ่มด้วย” อาจถามให้ตรงประเด็น แคบลงและง่ายต่อความเข้าใจของนักเรียน ดังนี้ “ให้นักเรียนสังเกตรูปต่าง ๆ ที่กำหนดมาให้ จากนั้นจำแนกรูปที่มีคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์เหมือนกันไว้ด้วยกันและให้บอกด้วยว่าคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เป็นเกณฑ์ในการจำแนกนั้นคืออะไร” ลักษณะการถามคำถามแบบใหม่นี้น่าจะป้องกันไม่ให้ปรากฏคำตอบประเภท “K D อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะไม่มีอะไรเหมือนกัน” อย่างไรก็ตามหากได้มีการจัดกิจกรรมการจัดกลุ่มบ่อยครั้งแล้ว เมื่อนักเรียนคุ้นเคย ลักษณะการถามคำถามประเภทนี้ก็ไม่ใช่ปัญหาอีกต่อไป

ข้อสังเกตจากการประเมินอีกข้อหนึ่งซึ่งสำคัญมากคือภาษาที่นักเรียนใช้เขียนสื่อสาร ในความหมายเดียวกันนักเรียนแต่ละคนอาจใช้คำไม่เหมือนกัน บางคนใช้ภาษาคณิตศาสตร์ แต่บางคนใช้ภาษาธรรมดาทั่วไปที่เป็นภาษาพูดหรือภาษาเขียน เช่น แทนที่จะใช้คำว่า “วงกลม” นักเรียนหลายคนใช้คำว่า “โค้ง” หรือ “มน” เป็นต้น กรณีของคำที่ควรกล่าวถึงเป็นพิเศษได้แก่คำว่า “คล้ายกัน” คำว่า “คล้ายกัน” ในเชิงเรขาคณิตมีความหมายเฉพาะซึ่งแตกต่างจากภาษาทั่วไป แต่ปรากฏว่ามีนักเรียนจำนวนมากใช้คำว่าคล้ายกันในบริบทของภาษาทั่วไป เช่น นักเรียนบอกว่า C I เป็นรูปที่คล้ายกัน, J O มีรูปทรงคล้ายกัน, K L คล้ายกัน ผู้วิจัยพิจารณาแล้วเห็นว่าการตอบลักษณะนี้เป็นการมองแบบสามัญธรรมดาโดยไม่ได้นึกถึงคณิตศาสตร์และเข้าข่ายคำตอบที่ไม่แสดงความชัดเจนของเหตุผล จึงไม่ได้คะแนนความคิดแบบอเนกนัยด้านคณิตศาสตร์

บางคำตอบมีเหตุผลมากกว่าหนึ่งเหตุผลในการอยู่กลุ่มเดียวกัน เช่น A G นักเรียนส่วนใหญ่ให้เหตุผลว่าเพราะทั้งคู่เป็นสามเหลี่ยมเหมือนกัน แต่มีบางคนบอกว่าเพราะ “มุมภายในรวมกันได้ 180 องศา”, “มีมุมภายในเท่ากัน”, หรือ C I เป็นรูปที่คล้ายกัน เพราะทั้งสองรูปเป็นสี่เหลี่ยม,

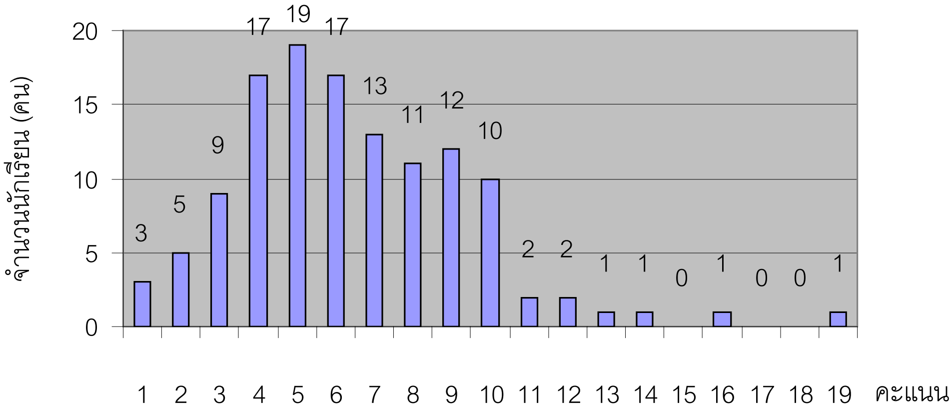
เพราะมีด้านขนานกัน 2 คู่, เพราะมีมุมแหลม 2 มุม มุมป้าน 2 มุม, หรือเพราะ 2 รูปนี้เกิดจากการดันมุมเข้าของรูป

ตัวอย่างที่ให้ไว้กับปัญหาบางข้อมีอิทธิพลต่อการคิดของนักเรียนบางคน ตัวอย่างอาจทำให้นักเรียนเข้าใจคำถามผิดหรืออาจไปสร้างกรอบการคิดให้แคบลง เช่น ในกรณีของนักเรียนบางคน ทุกคำตอบหรือเกือบทั้งหมดใช้อยู่เกณฑ์เดียวคือ “ลักษณะเหลี่ยม/ด้าน” ซึ่งเป็นเกณฑ์เดียวกันกับที่ให้ไว้ในตัวอย่าง

มีข้อสังเกตอีกหลายประเด็นที่น่ากล่าวถึง เช่น ประเด็นที่นักเรียนบางคนเขียนแสดงสมาชิกของกลุ่มทั้งหมดที่เป็นไปได้ซึ่งมีคุณสมบัติร่วมหนึ่ง ๆ แต่บางคนเขียนแสดงเพียงบางส่วน ยกตัวอย่างเพื่อเปรียบเทียบกรณีของนักเรียนสองคน คนหนึ่งเขียนว่า “B C E F G H K L อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะทั้ง 8 รูปมีมุมฉาก” แต่นักเรียนอีกคนหนึ่งเขียนว่า “B G อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะมีมุมฉาก” หรือนักเรียนคนหนึ่งเขียนว่า “B C F H I J K L อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะมีเส้นขนาน” แต่อีกคนเขียนว่า “B C I อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะมีเส้นขนาน” ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยประเมินให้นักเรียนทั้งสองคนได้คะแนนเท่ากัน อย่างไรก็ตามในโอกาสต่อไปคงต้องมีการขยายวิธีการประเมินคำตอบทั้งสองลักษณะนี้ให้มีระดับคะแนนต่างกัน แต่ต้องศึกษาก่อนว่าทำไมนักเรียนสองคนจึงทำต่างกัน ทั้งนี้อาจต้องไปปรับเปลี่ยนการถามโดยเพิ่มเงื่อนไขบังคับไปด้วยว่าต้องเขียนแสดงสมาชิกทั้งหมดที่เข้าเกณฑ์

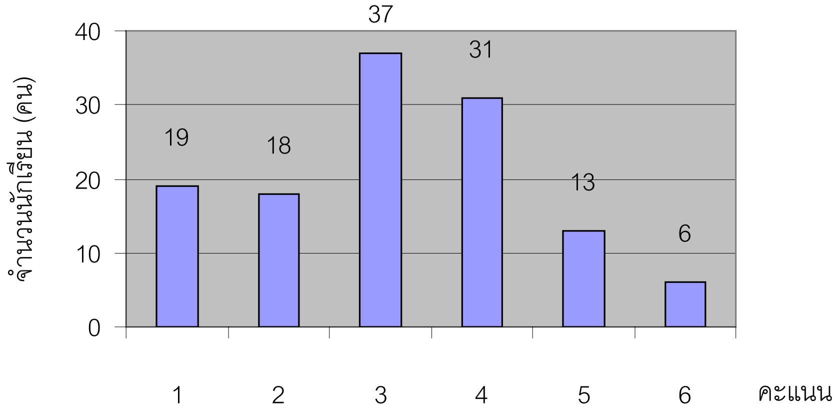
ข้อสังเกตที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งคือกรณีของคำตอบที่ไม่ได้แสดงถึงลักษณะร่วมของสมาชิกในกลุ่ม ซึ่งแยกได้เป็นสองประเด็นย่อย ประเด็นแรก คำตอบที่จัดกลุ่มโดยมีสมาชิกกลุ่มเพียง 1 ตัว เช่น “D เป็นรูปวงกลม” เป็นไปได้หรือไม่ที่นักเรียนเข้าใจว่าแต่ละกลุ่มอาจมีสมาชิกแค่ตัวเดียวก็ถือว่าถูกต้อง เพื่อป้องกันความเข้าใจผิดในจุดนี้ การเพิ่มข้อความในคำถามอาจช่วยได้ ประเด็นที่สอง คำตอบที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในกลุ่ม แต่ไม่ตรงกับความหมายของ “การจัดกลุ่มใหม่” ตามกรอบการประเมินความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของ Haylock ที่งานวิจัยเรื่องนี้นำมาใช้ เช่น “B G อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะ G เป็นส่วนหนึ่งของ B”

ความคล่องในการคิด เมื่อพิจารณาความคิดคล่องในการจัดกลุ่มรูป พบว่า คะแนนความคิดคล่องสูงสุดเท่ากับ 19 ฐานนิยมเท่ากับ 5 และค่าเฉลี่ยของความคิดคล่องเท่ากับ 6.35 ดังข้อมูลที่ปรากฏในภาพ 15 ซึ่งแปลความได้ว่านักเรียนสามารถจัดกลุ่มรูปได้คนละประมาณ 5–6 กลุ่ม



ภาพ 15 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดคล่องในการจัดกลุ่มรูป

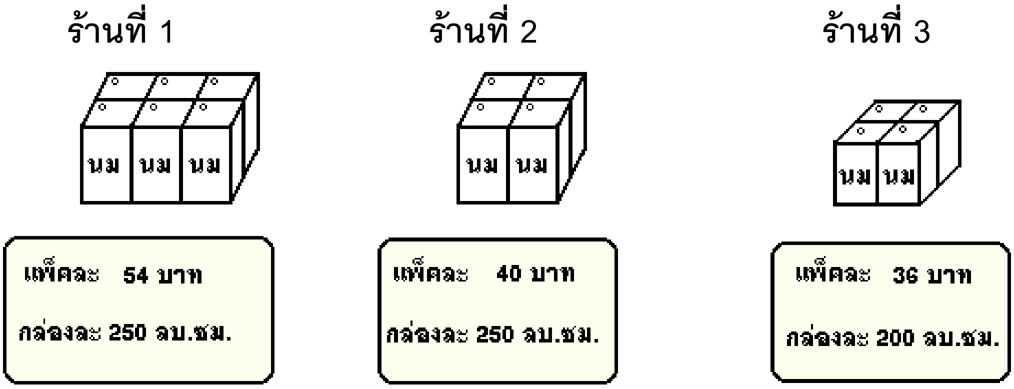
ความยืดหยุ่นในการคิด เมื่อพิจารณาถึงความคิดยืดหยุ่นในการจัดกลุ่มรูป พบว่า คะแนนความคิดยืดหยุ่นสูงสุดเท่ากับ 6 ฐานนิยมเท่ากับ 3 และค่าเฉลี่ยของความคิดยืดหยุ่นเท่ากับ 3.10 ดังข้อมูลที่ปรากฏในภาพ 16 ซึ่งแปลความได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนใช้เกณฑ์เพียง 3 เกณฑ์ต่อคนเท่านั้นในการจัดกลุ่มรูป



ภาพ 16 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดยืดหยุ่นในการจัดกลุ่มรูป

ปัญหา “การตั้งคำถามเรื่องนม”

สิ่งที่กำหนดให้เป็นรูปแสดงนมกล่องสามแบบซึ่งมีปริมาตรต่อกล่องและราคาต่างกัน



ภาพ 17 สถานการณ์นมกล่องสามแบบที่กำหนดให้ตั้งคำถาม

คำสั่งอธิบายว่า ร้านค้า 3 ร้านขายนมกล่องชนิดเดียวกัน ตามภาพ 17 นักเรียนจะช่วยตั้งคำถามจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้อย่างไรบ้าง โดยคำถามนั้นต้องหาคำตอบได้จริง ๆ จากข้อมูลที่กำหนด (ดูภาคผนวก ข หน้า 101)

ผู้วิจัยจำแนกลักษณะของคำตอบโดยใช้มโนทัศน์และแง่มุมต่าง ๆ เป็นเกณฑ์ มโนทัศน์ที่ใช้เกี่ยวกับ

1. ปริมาตร

1.1 ผลรวมของปริมาตร เช่น “นม 2 แพ็คจากร้าน 1 มีปริมาตรเท่าไร”, “นม 6 กล่องจากร้าน 2 มีปริมาตรเท่าไร”

1.2 การเปรียบเทียบปริมาตร เช่น “นม 2 กล่องจากร้าน 3 มีปริมาตรมากกว่านม 1 กล่องจากร้าน 1 เท่าไร”

2. ราคา

2.1 การหาราคาต่อกล่อง เช่น “ร้าน 1 ขายนมกล่องละเท่าไร”

2.2 ผลรวมของราคา เช่น “นมร้าน 1 ถ้าขาย 1 โหลขายเท่าไร”

2.3 การเปรียบเทียบราคา เช่น “ร้านไหนถูกที่สุด” “ร้าน 1 และร้าน 2 ถ้าคิดนมเป็นกล่อง ร้านไหนถูกกว่ากัน” “ร้าน 1 และร้าน 2 ขายแพงกว่ากันเท่าไร” “ถ้าร้าน 1 ขายนมได้ 1 แพ็ค ร้าน 2 ขายได้ 2 แพ็ค ร้านไหนได้เงินมากกว่าและได้มากกว่ากันเท่าไร”

2.4 เกี่ยวกับเงินทอน/เงินที่ต้องหามาเพิ่ม เช่น “ถ้าซื้อนมร้านละ 1 แพ็ค ให้ธนบัตรใบละ 500 บาท ได้รับเงินทอนเท่าไร”

3. จำนวนกล่อง/แพ็ค เช่น “นม 5 แพ็ค จากร้าน 1 มีกี่กล่อง”, “นม 100 กล่อง จากร้าน 2 คิดเป็นกี่แพ็ค”, “ซื้อนมจากร้าน 3 จำนวน 2000 ลบ.ซม. คิดเป็นกี่กล่อง/กี่แพ็ค”, “มีเงิน 500 บาท ซื้อนมร้าน 2 ได้มากที่สุดกี่กล่อง/กี่แพ็ค”

4. อื่น ๆ ซึ่งถือว่าเป็นเรื่องทั่วไป คำตอบของคำถามสามารถอ่านได้ทันทีจากข้อมูลที่กำหนดให้ เช่น “ร้าน 3 ขายนมแพ็คละกี่บาท”, “ร้าน 2 มีนมแพ็คละกี่กล่อง”, “นมร้าน 1 จุกล่องละกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร” หรือคำตอบที่ไม่ต้องคำนวณ เช่น “นมร้านไหนที่มีราคานม 1 แพ็คแพงที่สุด”, “กล่องนมร้านไหนเล็กที่สุด”

5. คำถามปลายเปิด เช่น “ถ้ามีเงินอยู่ 100 บาท ซื้อนมร้านไหนได้บ้าง”, “ร้าน 1 ปริมาตรกล่อง 250 ลบ.ซม. จงหาด้านกว้างและยาว”, “กล่องนมร้าน 1 สูง กว้าง หนา เท่าใด”, “ร้าน 1 2 และ 3 ถ้ามีนมรวมกัน 7 กล่องขายได้เงินกี่บาท”, “นักเรียนจะเลือกซื้อนมร้านไหน เพราะเหตุใด“ “วิธีการหาคำตอบว่านมร้านไหนถูก ร้านไหนแพง นักเรียนหาได้อย่างไร“, “นมร้านไหนแพงสุด คิดอย่างไร“, “ถ้านักเรียนให้คุณแม่ไปซื้อนมร้าน 1 นักเรียนบอกกับคุณแม่ว่ามันถูกหรือแพง“

ผู้วิจัยนับและจำแนกกลุ่มความคิดของคำตอบทั้งหมดได้ดังนี้

ตาราง 6 แสดงจำนวนนักเรียนที่ตั้งคำถามประเภทต่าง ๆ

ประเภทของคำถาม	**จำนวนนักเรียน (คน)**
ผลรวมของปริมาตร	54
การเปรียบเทียบปริมาตร	17
การหาราคาต่อกล่อง	74
ผลรวมของราคา	48
การเปรียบเทียบราคา	89
เกี่ยวกับเงิน	17
จำนวนกล่อง/แพ็ค	6
คำถามปลายเปิด	9
อื่น ๆ (อ่านคำตอบได้ทันที, ไม่ต้องคำนวณ)	69

* จำนวนนักเรียนที่ใช้ในการวิเคราะห์ n=124

ประเด็นที่ได้จากการตรวจและให้คะแนนในข้อนี้มีหลายประเด็นดังนี้

คำตอบที่แตกต่าง จากตาราง 6 พบว่าประเภทของคำตอบที่มีมากคือการเปรียบเทียบราคา, การหาราคาต่อกล่อง, คำถามที่อ่านคำตอบได้ทันทีหรือไม่ต้องคำนวณ, การหาผลรวมของปริมาตร, การหาผลรวมของราคา ตามลำดับ แง่มุมเหล่านี้มองออกมาได้ง่าย คำถามปลายเปิดตามตัวอย่างข้างต้นเป็นคำตอบที่แตกต่าง นอกจากนี้คำตอบที่มีความถี่น้อยก็ถือว่าเป็นคำตอบที่แตกต่างด้วย บางคำตอบมีความถี่เท่ากับ 1 ผู้วิจัยแบ่งตัวอย่างคำตอบที่แตกต่างซึ่งแสดงถึงความริเริ่มไว้คร่าว ๆ ดังนี้

1. คำถามเกี่ยวกับกำไร/ทุน/เปอร์เซ็นต์ เช่น “ถ้าซื้อนมมากล่องละ 8 บาท ร้านไหนขายได้กำไร”, “มานะซื้อนมจากร้าน 3 มา 3 แพ็ค นำไปขายต่อแพ็คละ 46 บาท ได้กำไรกี่บาท” “ถ้าต้นทุนของร้าน 1 แพ็คละ 50 บาท พ่อค้าขายได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์”, “ซื้อนมร้าน 2 มา 5 แพ็ค พ่อค้าลดให้ 5% เราซื้อมากี่บาท”, “หากร้าน 1 ลดราคาให้ 10% และร้าน 2 ลดให้ 3% เราควรเลือกซื้อร้านไหนดี”

2. คำถามเกี่ยวกับมิติทางเรขาคณิต เช่น “นมกล่องเป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด”, “นมกล่องมีปริมาตร 250 ลบ.ซม. สมมติสูง 5 ซม. นมกล่องนี้มีพื้นที่ฐานกี่ ตร.ซม. ”, “ร้าน 1 ปริมาตรกล่อง 250 ลบ.ซม. จงหาด้านกว้างและยาว”, “ร้าน 3 มีนมขนาด 200 ลบ.ซม. ถ้าทำให้เป็นลูกบาศก์เมตร ต้องทำอย่างไร”, “$\frac{3}{4}$ ของปริมาตรกล่องนมร้าน 2 เป็นเท่าไร”

3. คำถามที่เป็นโจทย์ปัญหาอื่น ๆ เช่น “ฉันมีเงินเป็น 6 เท่าของเพื่อน ถ้าเพื่อนมีเงินเป็น $\frac{1}{2}$ ของแม่ของเขา ถ้าแม่มีเงิน 18 บาท ฉันซื้อนมแพ็คใดหมดเงินพอดี”, “ถ้าทำให้นมกล่องของร้าน 3 เท่ากับปริมาตรกล่องของร้าน 1 และ 2 นมกล่องละเท่าไร”, “นมร้าน 1 หรือนมร้าน 2 เมื่อเพิ่มร้าน 2 อีก 2 กล่อง ถูกกว่ากัน”, “สุดาได้เงินวันละ 2 บาท กี่วันซื้อนมร้าน 1 ได้ 16 แพ็ค”, “ร้าน 1 ขายนมแพ็คละ 54 บาท ขายแพงกว่าร้าน 2 อยู่ 14 บาท ขายแพงไปกี่เปอร์เซ็นต์”

คำตอบที่ไม่ได้คะแนน คำถามที่ผู้วิจัยไม่นับเป็นคะแนนมีหลายประเภท ได้แก่

1. คำถามที่ไม่ชัดเจน คำถามประเภทนี้มีข้อมูลไม่เพียงพอหรือมีความกำกวมซึ่งตีความได้หลายอย่าง เช่น “ร้านใดขายนมได้กำไรมากที่สุด”, “ร้าน 1 ถ้าเราทำให้กล่องใหญ่ขึ้น มีราคาเท่าใด”, “ร้าน 1 ขายนมได้มากกว่าหรือน้อยกว่าร้าน 2”, “ร้าน 2 มีปริมาตรกล่อง 250 ลบ.ซม. คิดเป็นร้อยละเท่าใด”, “นมแพ็คละ 60 บาท กล่องละ 300 ลบ.ซม. มีทั้งหมดกี่กล่อง”

2. คำถามเดียวกันแต่ใช้ภาษาต่างกัน คำตอบประเภทนี้ไม่ได้คะแนนเพิ่ม เช่น “นมร้านไหนคุ้มที่สุดหรือประหยัดสุด” เหมือนกับถามว่า “นมร้านไหนถูกที่สุด” หรือคำถาม “นมร้าน 2 กับ 3 ร้านไหนขายแพงกว่า” คือคำถามเดียวกับ “นมร้าน 2 กับ 3 ร้านไหนขายถูกกว่า”

3. คำถามตั้งได้ทันทีแม้ไม่กำหนดสถานการณ์ปัญหามาให้ เช่น “มีเงิน 100 บาท ไปซื้อนม 40 บาท เหลือเงินกี่บาท”, “ถังบรรจุนม 500 ลบ.ซม. บรรจุนมได้ 3 กล่อง ถ้าต้องการบรรจุนมให้ได้ 10 กล่อง ต้องใช้นมกี่ ลบ.ซม.”

4. คำถามที่ไม่เป็นมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น “สินค้าที่นำมาขายในร้านทั้ง 3 ร้าน เป็นสินค้าอะไร”, “ร้าน 3 ร้านขายนมชนิดเดียวกันหรือไม่”, “นมมีลักษณะการขายแบบใด”, “ร้านไหนขายหมดก่อนเพราะอะไร”

5. คำถามซึ่งไม่มีเหตุผลของการกระทำที่สอดคล้องกับสถานการณ์ เช่น “ถ้านำนมทั้งหมดมารวมกันแล้วทำเป็นทศนิยมและเศษส่วนอย่างต่ำหรือจำนวนคละได้อย่างไร”, “ถ้าเรานำทั้ง 3 ร้านมาทำกันโดย + – x ÷ ได้ราคาเท่าไร”, “ร้าน 1 และร้าน 2 เมื่อนำจำนวนแพ็คมาคูณกันได้เท่าใด”, “ถ้าเอานม 3 ร้านมาหา ค.ร.น. ขายได้กี่บาท”

6. คำถามที่เปิดมากเกินไป เช่น “ถ้านักเรียนเป็นคนขายนักเรียนขายในร้านไหน”

ผลสะท้อนและข้อสังเกต

1. นักเรียนบางคนคิดเป็นระบบเพื่อสร้างคำถามให้ได้มากข้อ เช่น นักเรียนตั้งคำถามว่า “ร้าน 1 กับ 2 ร้านไหนขายแพงกว่ากัน“ ต่อมานักเรียนก็เปรียบเทียบอีก 2 คู่และได้คำถาม “ร้าน 1 กับ 3 ร้านไหนขายแพงกว่ากัน“ และ “ร้าน 2 กับ 3 ร้านไหนขายแพงกว่ากัน“ หลังจากนั้นก็เปลี่ยนคำว่า “แพงกว่า” เป็นคำว่า “ถูกกว่า” และได้คำถามเพิ่มอีก 3 ข้อ คือ “ร้าน 1 กับ 2 ร้านไหนขายถูกกว่ากัน”, “ร้าน 1 กับ 3 ร้านไหนขายถูกกว่ากัน”, “ร้าน 2 กับ 3 ร้านไหนขายถูกกว่ากัน“ จากทั้ง 6 คำถาม ผู้วิจัยให้คะแนนความคิดคล่องเป็น 6 แต่คะแนนความคิดยืดหยุ่นเป็น 1 เท่านั้น

2. คำถามที่นักเรียนตั้งส่วนใหญ่เป็นคำถามที่ต้องการคำตอบเดียว แต่ก็พบว่ามีบางคำถามที่ต้องการมากกว่าหนึ่งคำตอบ เช่น “ถ้าร้าน 1 ขายนมได้ 1 แพ็ค ร้าน 2 ขายนมได้ 2 แพ็ค ร้านไหนได้เงินมากกว่าและได้มากกว่ากันเท่าไร” คำถามนี้ต้องการสองคำตอบ ดังนั้นผู้วิจัยให้คะแนนความคิดคล่องของคำถามประเภทนี้ตามจำนวนคำตอบที่ต้องการ

3. ผู้วิจัยพบความเข้าใจผิดของนักเรียนจากคำถามที่นักเรียนตั้ง มโนทัศน์ที่เป็นปัญหาคือ “ปริมาตร” นักเรียนบางคนใช้คำว่า “ปริมาณ” “พื้นที่” หรือ “น้ำหนัก” แทนคำว่า “ปริมาตร” เช่น คำถามที่ว่า “นมร้านใดมีพื้นที่ 200 ลบ.ซม.” หรือ “นมร้าน 1 มีน้ำหนักกี่ ลบ.ซม.” นักเรียนคนหนึ่งไม่รู้จักคำว่า “ปริมาตร” และใช้คำว่า “ลบ.ซม.” แทน นักเรียนตั้งคำถามว่า “ร้าน 1 มี ลบ.ซม. กล่องละ 250 ลบ.ซม. ร้าน 2 มี ลบ.ซม. กล่องละ 250 ลบ.ซม. รวมกันสองร้านนี้มี ลบ.ซม. เท่าไร” นอกจากที่กล่าวมายังมีการใช้คำผิดแบบอื่น ๆ อีก เช่น “ความยาวกล่องละ 250 ลบ.ซม.”, “ซื้อนมร้าน 1 มา 5 กล่อง มีความหนักเท่าไร” หรือ “1 ซม. มีกี่ ลบ.ซม.” เป็นต้น

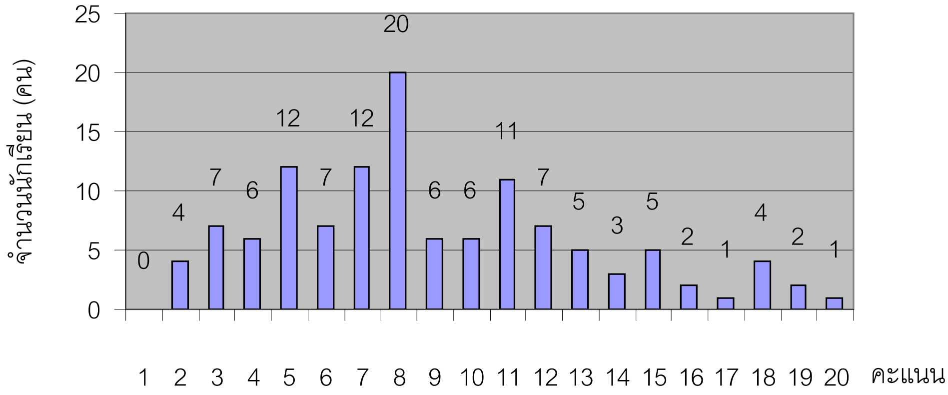
4. คำถามบางลักษณะที่นักเรียนแต่งขึ้นมาทำให้ผู้วิจัยเห็นว่านักเรียนบางคนรับรู้สถานการณ์ที่กำหนดให้ไม่เหมือนกับการรับรู้ของเพื่อนคนอื่น โดยนักเรียนบางคนเข้าใจว่าแต่ละร้านมีจำนวนกล่องนมอยู่เท่าที่ปรากฏให้เห็นในรูป นักเรียนคนหนึ่งตั้งคำถามว่า “ถ้าร้าน 3 เอานมออกไป 1 กล่อง เหลือนมกี่กล่อง”

5. มีนักเรียนคนหนึ่งตั้งคำถามว่า “ทำไมร้าน 2 จึงขายแพงกว่าร้าน 3 ในเมื่อจำนวนกล่องเท่ากัน” ผู้วิจัยคิดว่าอาจมีคำอธิบายได้สองแนวทาง แนวทางแรกเป็นเรื่องการรับรู้ที่ผิดเกี่ยวกับความจุของกล่องนมในรูป ถึงแม้มีความจุของกล่องนมบอกไว้แล้ว แต่นักเรียนบางคนไม่ได้ตระหนักว่าความจุของกล่องนมต่างกันเพราะรูปที่กำหนดแสดงขนาดของกล่องนมให้แตกต่างเพียงเล็กน้อยเท่านั้น คำอธิบายอีกแนวหนึ่งคือ นักเรียนอาจต้องการให้ตอบว่า “ก็เพราะกล่องนมของร้าน 2 ใหญ่กว่าของร้าน 3” เหตุผลอาจตรงไปตรงมาเช่นนี้ก็ได้

6. มีคำถามจำนวนหนึ่งซึ่งผู้วิจัยไม่สามารถคาดเดาได้ว่านักเรียนมีความตั้งใจอย่างไร บางคำถามเป็นคำถามที่ดูธรรมดา ๆ ถามแบบผิวเผินแต่กลับมีคำตอบที่ลึกซึ้ง ผู้วิจัยคิดว่าผู้ที่ตั้งคำถามเองก็ไม่ได้ตระหนักในจุดนี้ เช่น คำถามที่ว่า “ร้าน 2 แพงกว่าร้าน 3 แต่ถูกว่าร้าน 1 เท่าไร” หรือ “นมร้าน 2 แพงกว่าร้าน 3 กี่บาท” หากมองแค่ตื้น ๆ ก็ตอบได้โดยไม่สนใจว่าปริมาตรของกล่องนมของทั้งสองร้านไม่เท่ากัน ผู้วิจัยเดาว่านักเรียนอาจคิดตื้น ๆ เช่นนี้ การเปรียบเทียบว่าร้านไหนแพงกว่ากัน หากจะคิดให้ถูกต้อง อาจทำได้อย่างน้อยสองวิธี วิธีแรกเป็นการเปรียบเทียบราคาโดยคิดจากปริมาตรที่เท่ากัน วิธีที่สอง คือการเปรียบเทียบปริมาตรโดยคิดจากราคาที่เท่ากัน

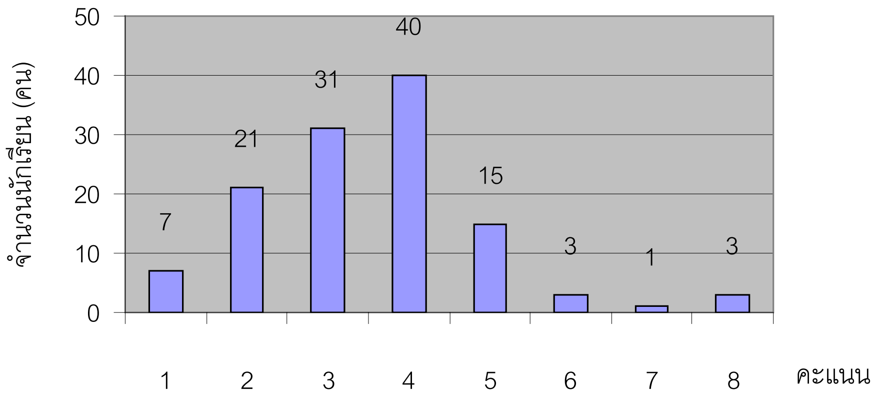
7. นักเรียนบางคนนิยมเขียนตอบสั้น ๆ บางคนก็ใส่รายละเอียดลงไปมากเกิน ทำให้การใช้เวลาในการเขียนแต่ละคำตอบต่างกัน จำนวนคำตอบที่ทำได้จึงต่างกันด้วย ดังนั้นหากจะประเมินความสามารถออกมาเป็นตัวเลขก็น่าจะต้องศึกษาหาแนวทางและวิธีการประเมินที่จะมีความยุติธรรมกว่านี้

ความคล่องในการคิด เมื่อพิจารณาความคิดคล่องในการตั้งคำถาม พบว่า คะแนนความคิดคล่องสูงสุดเท่ากับ 20 ฐานนิยมเท่ากับ 8 ค่าเฉลี่ยของความคิดคล่องเท่ากับ 8.70 ดังปรากฏในภาพ 18 ซึ่งแปลความได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนตั้งคำถามได้ประมาณ 8 คำถามต่อคน



ภาพ 18 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดคล่องในการตั้งคำถาม

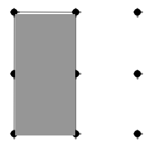
ความยืดหยุ่นในการคิด เมื่อพิจารณาความคิดยืดหยุ่นในการตั้งคำถาม พบว่า คะแนนความคิดยืดหยุ่นสูงสุดเท่ากับ 8 ฐานนิยมเท่ากับ 4 ค่าเฉลี่ยของความคิดยืดหยุ่นเท่ากับ 3.44 ดังข้อมูลที่ปรากฏในภาพ 19 ซึ่งแปลความได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนแต่ละคนตั้งคำถามได้ประมาณ 3–4 ประเภทที่ไม่ซ้ำกัน



ภาพ 19 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดยืดหยุ่นในการตั้งคำถาม

ปัญหา “พื้นที่”

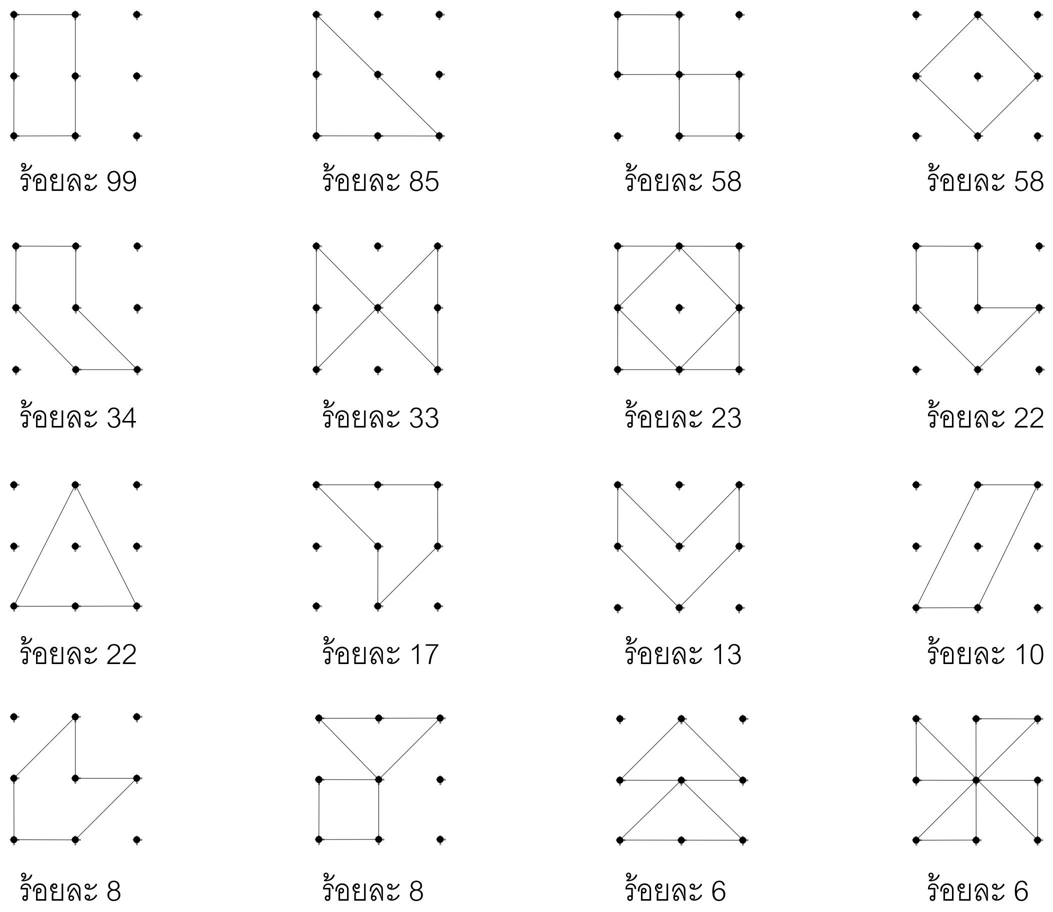
สิ่งที่กำหนดให้เป็นจุด 9 จุด แต่ละจุดในแนวนอนหรือแนวตั้งห่างกัน 1 เซนติเมตร คำสั่งบอกว่า “จงลากเส้นเชื่อมต่อจุดเพื่อให้ได้รูปที่มีพื้นที่ 2 ตารางเซนติเมตร ให้แรเงาพื้นที่นั้นด้วย” (ดูภาคผนวก ข หน้า 102) ตัวอย่างสำหรับปัญหาข้อนี้เป็นดังนี้



รูปนี้มีพื้นที่ 2 ตารางเซนติเมตร

ประเด็นที่ได้จากการตรวจและให้คะแนนในข้อนี้มีดังนี้

คำตอบทั้งหมด จำนวนนักเรียนที่ใช้ในการวิเคราะห์ n=124 ผู้วิจัยจำแนก นับคำตอบทั้งหมดและแสดงคำตอบที่มีความถี่สูงสุด 16 รูปแรก เรียงลำดับจากมากไปน้อย ผลเป็นดังนี้



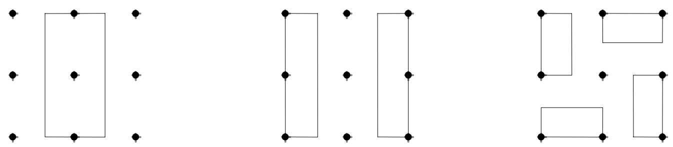
ภาพ 20 แสดงคำตอบปัญหา “พื้นที่” รูปแบบต่าง ๆ

ผลสะท้อนและข้อสังเกต

1. แม้ว่านักเรียนสามารถผลิตคำตอบออกมารวมกันได้จำนวนมาก แต่ก็ยังไม่ครบทุกคำตอบที่เป็นไปได้ ภาพ 21 แสดงคำตอบที่ไม่พบในรายการที่เป็นคำตอบจากนักเรียนทั้งหมด

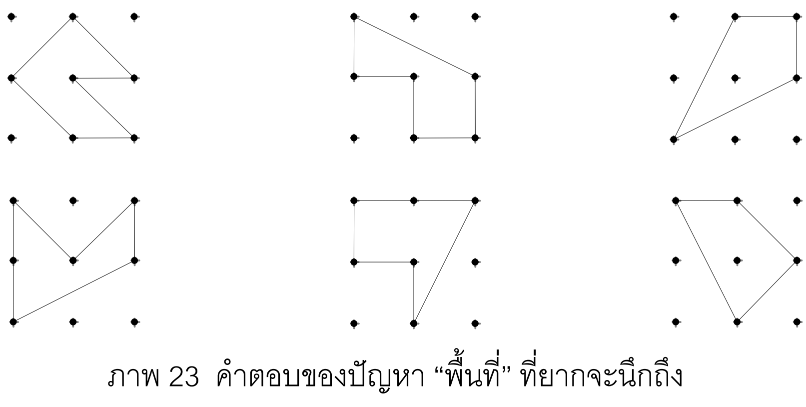
ภาพ 21 คำตอบของปัญหา “พื้นที่” ที่ไม่มีนักเรียนคนใดคิดได้

2. หลายคำตอบแสดงออกถึงการคิดออกนอกกรอบอย่างสร้างสรรค์ นักเรียนคนหนึ่งให้คำตอบลักษณะตามภาพ 22 เกือบทั้งหมด (ดูภาคผนวก ค หน้า 120-121)



ภาพ 22 คำตอบของปัญหา “พื้นที่” ที่แปลกแตกต่าง

3. แม้บางคำตอบ เช่น สี่เหลี่ยมด้านขนาน จะดูไม่แปลกมากนัก แต่นักเรียนจำนวนมากไม่สามารถคิดออกมาได้ บางคำตอบมีนักเรียนเพียง 1–4 คนเท่านั้นที่คิดออกมาได้ ดังเช่นคำตอบในภาพ 23

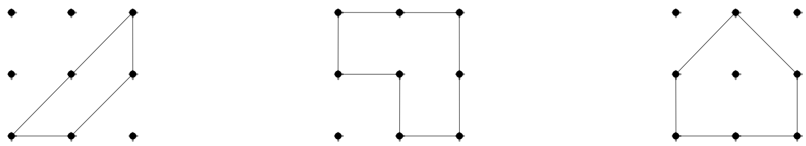


ภาพ 23 คำตอบของปัญหา “พื้นที่” ที่ยากจะนึกถึง

4. จากผลการนับความถี่ของคำตอบ พบว่า ความถี่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคิดเป็นหนึ่งในสิบของความถี่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และความถี่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วคิดเป็นหนึ่งในสี่ของสามเหลี่ยมมุมฉาก แม้ว่ารูปบางรูปมีลักษณะใกล้เคียงกัน แต่ความถี่ที่แตกต่างกันมากเช่นนี้ชี้ให้เห็นว่า คำตอบต่าง ๆ มีระดับของความยากที่จะนึกถึงได้ไม่เท่ากัน และอาจกล่าวได้ว่า นักเรียน

คนที่คิดคำตอบซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกมาได้ด้วยนั้นใช้ความคิดยืดหยุ่นได้ดีกว่านักเรียนคนที่คิดถึงสี่เหลี่ยมผืนผ้าและสามเหลี่ยมมุมฉากเพียงอย่างเดียว

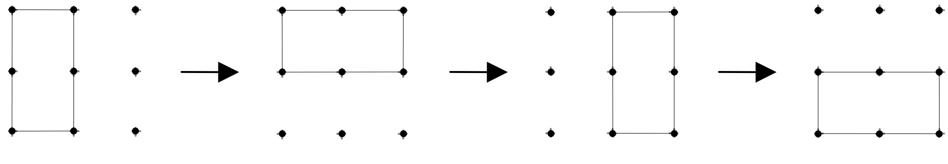
5. นักเรียนบางคนลืมหรือไม่ตระหนักเกี่ยวกับเงื่อนไขสำคัญของปัญหา คำตอบจำนวนหนึ่งไม่สอดคล้องตามเงื่อนไขเพราะพื้นที่ไม่เท่ากับ 2 ตารางเซนติเมตร จึงไม่ได้คะแนน (ดูตัวอย่างในภาคผนวก ค หน้า 123) ประเด็นนี้น่าแปลกใจเพราะในแบบสอบมีข้อความกำกับว่า “อย่าลืมว่าต้องให้ได้พื้นที่ 2 ตร.ซม.” และระหว่างดำเนินการสอบผู้วิจัยก็ได้คอยพูดเตือนถึงเงื่อนไขนี้หลายครั้ง สาเหตุอื่นอาจเป็นเพราะนักเรียนคำนวณพื้นที่ผิดหรือพยายามแสดงความคิดที่แตกต่างหรือคิดคำตอบอื่นไม่ได้แล้วจึงเลือกที่ตอบอะไรก็ได้เพื่อให้ได้จำนวนคำตอบมาก



ภาพ 24 คำตอบที่ผิดเงื่อนไขของปัญหา

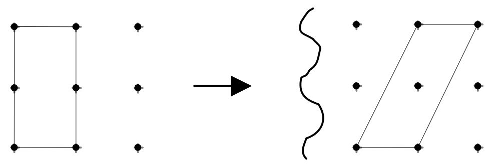
6. นักเรียนที่คิดได้หลายรูปแบบเขามีวิธีคิดอย่างไร จากการสัมภาษณ์นักเรียนบางคนอย่างไม่เป็นทางการ พบว่าบางคนก็ไม่มีวิธี ลากเส้นไปเรื่อย ๆ โดยการลองผิดลองถูก แต่บางคนก็อธิบายว่า พื้นที่ทั้งหมดเป็น 4 ตารางเซนติเมตร ถ้ารูปที่ต้องการแรเงามีพื้นที่ 2 ตารางเซนติเมตร ดังนั้นส่วนที่ไม่ได้แรเงาก็ต้องมีพื้นที่ 2 ตารางเซนติเมตร นักเรียนใช้ข้อสังเกตนี้ในการสร้างคำตอบ

7. นักเรียนส่วนมากมองเห็นโอกาสที่จะสร้างรูปใหม่ด้วยการหมุนหรือการพลิกรูปเดิมที่สร้างได้แล้ว (ตัวอย่างในภาคผนวก ค หน้า 125-126 และ ภาพ 25) คะแนนความคิดคล่องจึงเพิ่มขึ้น แต่นักเรียนอีกหลายคนก็มองไม่เห็นโอกาสนั้นหรือถึงแม้เห็นแต่อาจเลือกที่จะไม่ใช้โอกาสนั้นก็ได้เพราะคิดว่ารูปที่เกิดจากการหมุนกับรูปเดิมคือรูปเดียวกัน (เช่น ตัวอย่างในภาคผนวก ค หน้า 122) ฉะนั้นในเรื่องของความคิดยืดหยุ่นนี้ อาจพิจารณาได้ว่ามีทั้งยืดหยุ่นอย่างเป็นระบบ ยืดหยุ่นแบบไม่เป็นระบบคือลองผิดลองถูกไปเรื่อย ๆ หรือเลือกที่จะไม่แสดงความยืดหยุ่นก็ได้ ในประเด็นนี้ทำให้เห็นว่าการประเมินความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยโดยให้นักเรียนเขียนตอบยังมีข้อจำกัดอยู่มาก



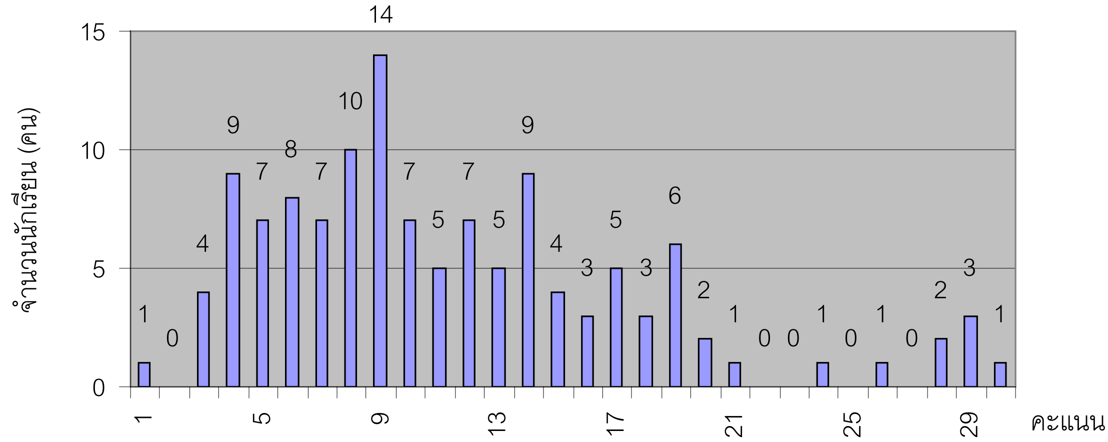
ภาพ 25 การสร้างรูปใหม่ด้วยการคิดอย่างเป็นระบบ

ถึงแม้การคิดอย่างเป็นระบบอาจทำให้คะแนนความคิดคล่องเพิ่มขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม การคิดอย่างเป็นระบบในบางครั้งก็เป็นกลายเป็นอุปสรรคของการคิดอย่างยืดหยุ่น เช่น เมื่อความคิดยึดติดอยู่กับสี่เหลี่ยมผืนผ้าเสียแล้วอาจส่งผลให้นึกถึงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่ออก (ภาพ 26) เรื่องนี้คล้ายกับผลการวิจัยที่ Haylock (1985) รายงานไว้ในปัญหา “การตั้งคำตอบ” ของนักเรียน การคิดอย่างเป็นระบบทำให้คำถามที่นักเรียนตั้งขาดความน่าสนใจ ไม่โดดเด่นและจำกัดอยู่ในบริบทแคบ ๆ การคิดอย่างเป็นระบบทำให้ต้องมองและนึกถึง “ของเดิม” ที่คิดได้ก่อนแล้ว ทำให้ความคิดติดขัดและไปไม่ถึงความคิดอื่น ๆ ในที่สุด



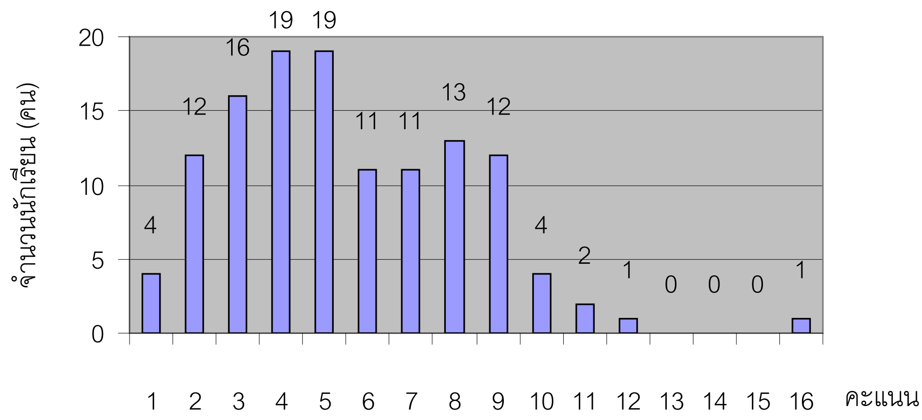
ภาพ 26 การคิดอย่างเป็นระบบอาจเป็นอุปสรรคต่อความคิดยืดหยุ่น

ความคล่องในการคิด เมื่อพิจารณาความคิดคล่องในการสร้างรูปที่มีพื้นที่ 2 ตารางเซนติเมตร พบว่า คะแนนความคิดคล่องสูงสุดเท่ากับ 30 ซึ่งมากกว่าจำนวนที่ว่างของคำตอบที่จัดให้ในแบบทดสอบข้อนี้ (จัดไว้ให้ 29) นักเรียนคนเดียวที่ได้คะแนน 30 นี้เขียนคำตอบเพิ่มเติมขึ้นมาเองบนที่ว่างที่มีอยู่ในกระดาษ ฐานนิยมเท่ากับ 9 และค่าเฉลี่ยความคิดคล่องเท่ากับ 11.46 ดังข้อมูลที่ปรากฏในภาพ 27 ซึ่งแปลความได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนคิดคำตอบสำหรับข้อนี้ได้ประมาณคนละ 11 คำตอบ (บางคำตอบเหมือนกันถ้าหมุนหรือพลิกรูป)



ภาพ 27 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดคล่องในการสร้างรูป

ความยืดหยุ่นในการคิด เมื่อพิจารณาความคิดยืดหยุ่นในการสร้างรูป พบว่า คะแนนความคิดยืดหยุ่นสูงสุดเท่ากับ 16 ฐานนิยมเท่ากับ 4 และ 5 ค่าเฉลี่ยความคิดยืดหยุ่นเท่ากับ 5.54 ดังข้อมูลที่ปรากฏในภาพ 28 ซึ่งแปลความได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนแต่ละคนคิดได้ 4–5 คำตอบที่แตกต่างกัน



ภาพ 28 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดยืดหยุ่นในการสร้างรูป

ปัญหา "เกม 24"

สิ่งที่กำหนดให้เป็นตัวเลข 2 3 10 21 และตัวดำเนินการ $+ - \times \div (\;)$ คำสั่งบอกว่า "จงใช้ตัวเลขและเครื่องหมายข้างบนนี้<u>เท่านั้น</u> ทำอย่างไรก็ได้เพื่อให้ผลลัพธ์ออกมาเป็น 17 โดยนักเรียนสามารถใช้ตัวเลขและเครื่องหมาย<u>ซ้ำกันได้</u>หลายครั้ง" ปัญหาข้อนี้จัดตัวอย่างไว้ให้ด้วย ตัวอย่างเขียนว่า "21 – 10 + 3 + 3 = 17" (ดูภาคผนวก ข หน้า 103)

จากการวิเคราะห์คำตอบของนักเรียน 126 คน พบว่าการจัดแยกคำตอบทั้งหมดออกเป็นกลุ่มย่อยทำได้ยาก ผู้วิจัยทดลองใช้เกณฑ์ต่าง ๆ ในการจำแนก เช่น เกณฑ์ความซับซ้อนโดยพิจารณาจากจำนวนตัวดำเนินการในคำตอบ หรือพิจารณาจากการใช้ตัวดำเนินการ $+ -$ ร่วมกับ $\times \div$ แต่เกณฑ์เหล่านี้ใช้จำแนกคำตอบจำนวนมากไม่ได้ ผู้วิจัยประเมินว่าทุกคำตอบมีความหมายและมีความสำคัญไม่ยิ่งหย่อนไปกว่ากัน ประเด็นเรื่องการจำแนกคำตอบจึงไม่สมเหตุสมผลที่จะทำเหมือนกับปัญหาสี่ข้อที่ผ่านมา เพราะฉะนั้นในข้อนี้จึงพิจารณาคะแนนความคิดคล่องเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

ประเด็นสำคัญที่ได้จากการตรวจและให้คะแนนในข้อนี้มีหลายประเด็นดังนี้

คำตอบทั้งหมด คำตอบมีความหลากหลาย ทั้งที่ใช้ตัวดำเนินการเดียวและแบบผสม มีทั้งแบบธรรมดาและซับซ้อน เช่น

10+3+2+2	(21÷3)+10	(10+3)+(2x2)	(21+10+3)÷2
21–2–2	(10÷2)+2+10	(21–10)+(3x2)	(10x3)–(10+3)
10+10–3	(10x2)–3	(3+2)x3+2	(21x2) ÷3+3
3+3+3+3+3+2	(3x3)–2+10	(3x3x3)–10	(3x3)+(2x2x2)
2+2+2+2+2+2+2+3	21–(2x2)	(3x3)+2+3+3	(21÷3)x2+3

คำตอบที่แตกต่าง จากคำตอบที่หลากหลายข้างต้น บางคำตอบพบเพียงครั้งเดียว จึงอาจกล่าวได้ว่าคำตอบที่แตกต่างต่อไปนี้มีแนวโน้วที่ได้คะแนนความริเริ่มสูงถ้าให้คะแนนตามความถี่ที่ปรากฏ บางคำตอบซับซ้อนหลายขั้นตอน บางคำตอบก็ไม่ได้โดดเด่นนัก

(3+3+3+3+3+3)–(21–(2x10))	(21x2)÷(3x2)+10
((21x10)–(10x10x2))+(21÷3)	(21+10+3) ÷2
((21x2)–(3x10))+(10÷**<u>5</u>**)	(21) ÷3)x2+3
(3+2)x10–21–(10+2)	(21–3) ÷2x3–10

คำตอบที่ไม่ได้คะแนน เพราะสาเหตุต่าง ๆ กัน ดังต่อไปนี้

1. คำตอบที่ใช้ตัวเลขที่ไม่ได้กำหนด เช่น 10+**<u>5</u>**+2, (21–3)+**<u>1</u>**, 2x**<u>5</u>**x2+10, (21+**<u>6</u>**)–10 ตัวเลขตัวหนาไม่ใช่ตัวเลขที่จัดให้

2. คำตอบซึ่งคำนวณผิด เช่น 21–2–3, (10–3)–21–2, (10x3)+(21+2), (21+3+2)–10 คำตอบเหล่านี้ไม่ให้ผลลัพธ์เท่ากับ 17 บางคำตอบก็ใกล้เคียง อาจเป็น 16 หรือ 18 แต่บางคำตอบก็ห่างไกลจาก 17 มาก

3. คำตอบซึ่งผิดเพราะวางวงเล็บผิดตำแหน่ง เช่น 10x(2–3), (21+2)–(10+2+2), (2+3+10)–(3+3+2), (21–3)–(3+2) คำตอบนี้นักเรียนอาจตั้งใจเขียนว่า (10x2)–3, (21+2)–10+(2+2), (2+3+10)–3+(3+2), และ 21–3–3+2 ตามลำดับ

4. คำตอบซึ่งผิดเพราะไม่ใส่วงเล็บ เช่น 3+2x2+10–3 คำตอบนี้เท่ากับ 3+(2x2)+10–3 = 14 ผู้วิจัยเดาว่าจริง ๆ แล้วนักเรียนคงตั้งใจที่จะตอบว่า (3+2)x2+10–3 ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น 17

5. คำตอบซึ่งวางตัวดำเนินการผิดตำแหน่ง มีนักเรียนกลุ่มหนึ่งใช้ตัวดำเนินการหารผิด เช่น (3÷21)+10, 1+2+(2÷10), 2÷10+10+2, (2÷10)x3+2 สำหรับตัวดำเนินการลบ ผู้วิจัยพบคำตอบ 3–(10+10)

6. คำตอบที่เพิ่มเข้าและหักออกแบบธรรมดา เช่น นักเรียนมีคำตอบอยู่แล้วว่า 10+2+2+3 คำตอบนี้ได้คะแนน หากนักเรียนตอบอีกว่า 10+2+2+3+3–3 คำตอบนี้ไม่ได้คะแนนเพิ่ม เพราะถือว่าไม่แตกต่างกัน

7. คำตอบที่เกิดจากการสลับที่ เช่น ถ้าได้คะแนนจาก 10+3+2+2 ไปแล้ว ไม่ได้คะแนนเพิ่มจากคำตอบ 10+2+2+3 หรือ 2+2+3+10 เพราะถือว่าไม่แตกต่างกัน

ผลสะท้อนและข้อสังเกต

1. นักเรียนบางคนตอบว่า 10+3+2+2 แล้วก็มี 10+2+2+3, 3+2+2+10,10+2+3+2 นักเรียนคงไม่ได้ตระหนักว่าคำตอบเหล่านี้เหมือนกัน และนักเรียนส่วนมากที่ให้คำตอบลักษณะนี้ก็คงไม่ได้ตั้งใจที่สลับที่เพื่อให้ได้จำนวนคำตอบมากขึ้น เพราะคำตอบเหล่านี้ของนักเรียนไม่ได้เรียงติดต่อเนื่องกัน

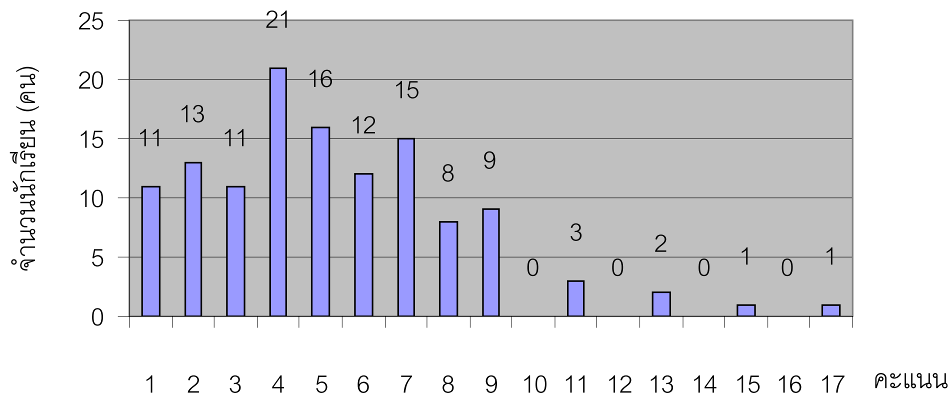
2. เรื่องความผิดพลาดจากการใช้วงเล็บไม่น่าเกิดขึ้น ผู้วิจัยพบว่ามีคำตอบที่ไม่ได้ใช้วงเล็บจำนวนมากที่ได้คะแนน ทั้งนี้เพราะผู้วิจัยตรวจโดยให้ความสำคัญของ × ÷ ก่อน + − ฉะนั้นคำตอบ 10x2–3 ได้คะแนนถึงจะไม่ใส่วงเล็บก็ตาม อย่างไรก็ดี ผู้วิจัยยังมีข้อสงสัยกับบางคำตอบว่าวงเล็บอยู่ตรงไหน หากให้นักเรียนเขียนวงเล็บด้วย นักเรียนจะใส่ไว้ตรงกับที่ผู้วิจัยคิดหรือไม่ ถ้าไม่ตรงกันก็แสดงว่าการให้คะแนนผิดพลาดไป ความผิดพลาดเกี่ยวกับวงเล็บอีกจุดหนึ่งที่พบว่าเป็นปัญหา คือ นักเรียนบางคนเข้าใจว่า –2–3 กับ –(2–3) เหมือนกัน หรือ –2+3 เหมือนกับ –(2+3)

3. ปัญหาความผิดพลาดจากการวางตัวดำเนินการผิดตำแหน่ง เช่น 2÷10=5 หรือ 3÷21=7 น่าจะมีคำอธิบายได้ จากประสบการณ์ผู้วิจัยเคยพบว่ามีความไม่ชัดเจนตรงจุดนี้จริง โดยคำพูดที่ว่า “สองหารสิบ” อาจมีความหมายว่าหมายถึง 10÷2 หรือบางคนก็ตีความตามคำที่อ่านออกเสียงว่า 2÷10

4. นักเรียนคนหนึ่งผลิตคำตอบที่ใช้ตัวเลขที่ไม่ได้กำหนด ถึงแม้สองคำตอบแรกจะอยู่ในเงื่อนไข แต่ตั้งแต่คำตอบที่สามเป็นต้นไป นักเรียนใช้ตัวเลขที่ไม่ได้กำหนดในทุกคำตอบ โดยเริ่มจาก 16+1, 15+2, 2+3+12, 4+4+4+5 และอีกหลายคำตอบ รวมถึงคำตอบที่ซับซ้อนอันนี้ด้วย ((4x4)+10)÷13+15 ผู้วิจัยตีความว่านักเรียนคนนี้พยายามที่แสดงความคิดของตัวเองออกมาโดยตั้งใจละเลยเงื่อนไขที่กำหนดไว้

5. คำตอบบางคำตอบแสดงให้เห็นถึง "การพลิกแพลง" ซึ่งอาจมองได้ว่าเป็นลักษณะความยืดหยุ่นของการคิด นักเรียนคนหนึ่งตอบว่า 21–3–3+2 จากนั้นก็ดัดแปลงเป็นคำตอบ 21–(3x2)+2 หรือนักเรียนอีกคนตอบว่า (21–10)+(3x2) จากนั้นก็ดัดแปลงเป็น (21–10)+(3+3) หรือนักเรียนอีกคนตอบว่า 21–10+3+3 จากนั้นดัดแปลงเป็น 21–10+2+2+2 สิ่งเหล่านี้เป็นสิ่งที่ผู้วิจัยหวังที่จะพบมาก ๆ จากการตรวจ แต่ก็พบได้ไม่มากนัก

ความคล่องในการคิด เมื่อพิจารณาความคิดคล่องในการเล่นเกม 24 พบว่า คะแนนความคิดคล่องสูงสุดเท่ากับ 17 ฐานนิยมเท่ากับ 4 ค่าเฉลี่ยของความคิดคล่องเท่ากับ 5.14 ดังข้อมูลที่ปรากฏในภาพ 29 ซึ่งแปลความได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนคิดคำตอบออกมาได้ประมาณ 4–5 คำตอบต่อคน



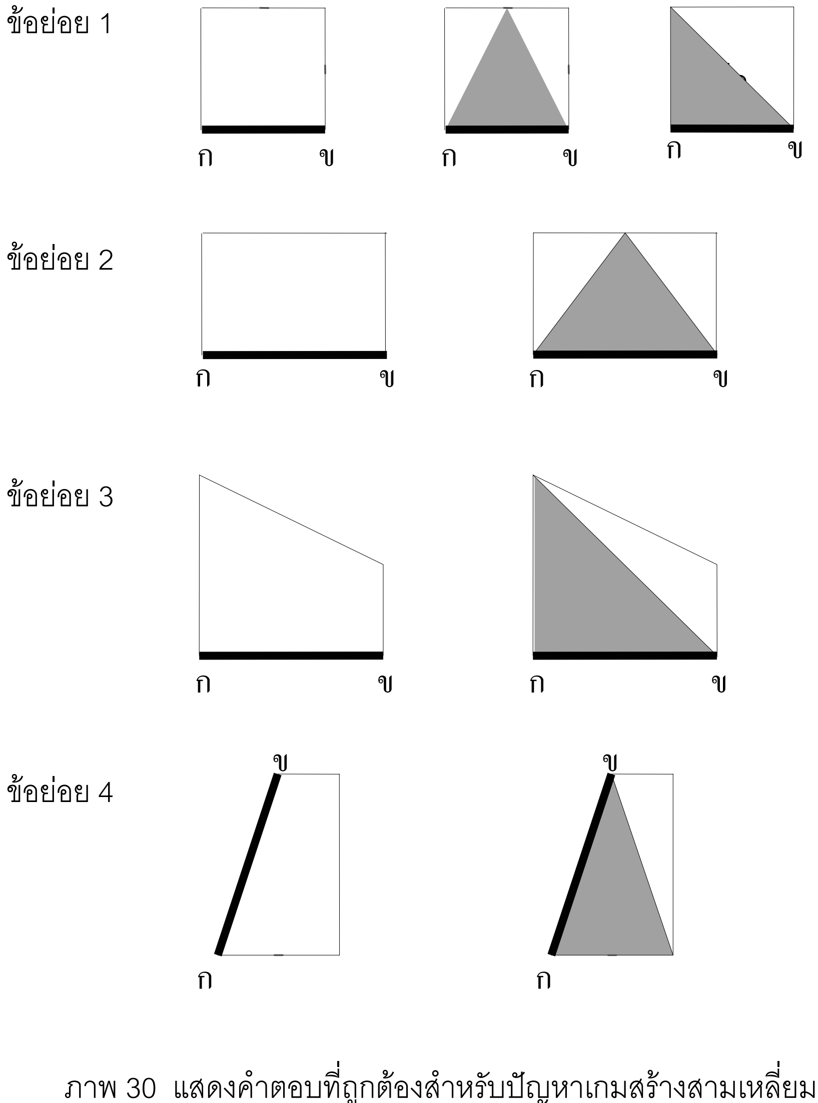
ภาพ 29 แผนภูมิแสดงจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนความคิดคล่องในการเล่นเกม 24

ตอนที่ 2 ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด

แบบสอบประเมินความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดประกอบด้วยปัญหา 4 ข้อ ผู้วิจัยเรียกปัญหาข้อ 1-4 ว่า "เกมสร้างสามเหลี่ยม" "เกมตัดสี่เหลี่ยม" "เกมทายจำนวน" และ "เกมตวงน้ำ" ตามลำดับ โดยปัญหาข้อ 1 และข้อ 3 เป็นการประเมินความไม่ยืดหยุ่นของการคิดที่เรียกว่า "การจำกัดขอบเขตการคิด" ปัญหาข้อ 2 และข้อ 4 เป็นการประเมินความไม่ยืดหยุ่นของการคิดที่เรียกว่า "การยึดติดกับขั้นตอนวิธี" ผลการวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละข้อมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

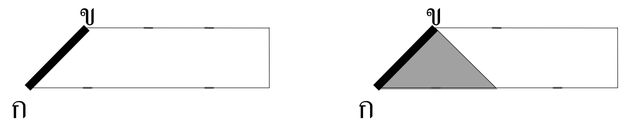
ปัญหา “เกมสร้างสามเหลี่ยม”

สิ่งที่กำหนดให้สำหรับสถานการณ์ของปัญหานี้มีข้อย่อย 6 ข้อ แต่ละข้อเป็นรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งระบุด้าน กข มาให้ ข้อย่อย 1-3 มีด้าน กข อยู่ในแนวนอน ข้อย่อย 4-6 มีด้าน กข อยู่ในแนวเอียง คำสั่งบอกให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนด โดยต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขสองประการคือ (1) พื้นที่ของสามเหลี่ยมหน้าจั่วต้องมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ และ (2) ด้าน กข ต้องเป็นด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่สร้างขึ้นด้วย ในการแก้ปัญหาข้อนี้นักเรียนใช้ไม้บรรทัดวัดความยาวและลากเส้น (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ข หน้า 106)

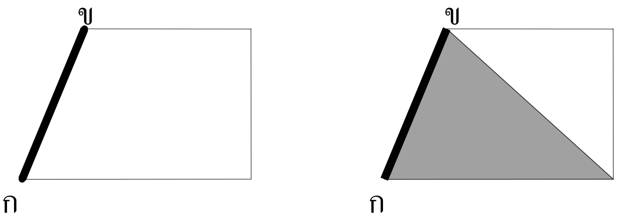


ภาพ 30 แสดงคำตอบที่ถูกต้องสำหรับปัญหาเกมสร้างสามเหลี่ยม

ข้อย่อย 5

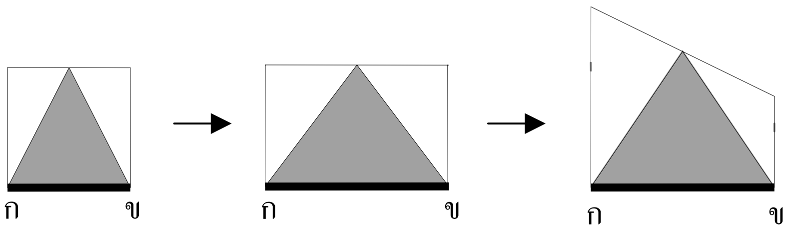


ข้อย่อย 6

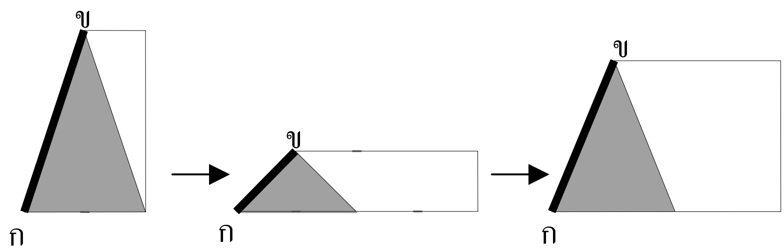


ภาพ 30 (ต่อ) แสดงคำตอบที่ถูกต้องสำหรับปัญหาเกมสร้างสามเหลี่ยม

การเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดในปัญหานี้พิจารณาคำตอบของข้อย่อย 3 และ 6 นักเรียนที่จำกัดขอบเขตการคิดโดยยึดติดว่าด้านในแนวนอนต้องทำหน้าที่เป็นฐานของสามเหลี่ยมเท่านั้น ตอบข้อย่อย 3 ในลักษณะเดียวกันกับที่ตอบในข้อย่อย 1 และ 2 (ภาพ 31) หรือตอบข้อย่อย 6 ในลักษณะเดียวกันกับที่ตอบในข้อย่อย 4 และ 5 (ภาพ 32)



ภาพ 31 การจำกัดขอบเขตการคิดใน “เกมสร้างสามเหลี่ยม” แบบ 1



ภาพ 32 การจำกัดขอบเขตการคิดใน “เกมสร้างสามเหลี่ยม” แบบ 2

ตาราง 7 จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนระดับต่าง ๆ สำหรับปัญหา “เกมสร้างสามเหลี่ยม”

ระดับคะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)			
	6/3	6/6	6/7	รวม
0	25	14	21	60
1	2	3	0	5
2	1	2	5	8
3	11	15	12	38
4	3	7	5	15
ประเมินไม่ได้	0	1	0	1
รวม	42	42	43	127

จากตาราง 7 พบว่า นักเรียนประมาณร้อยละ 40 เอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดข้อนี้ได้ ส่วนอีกประมาณร้อยละ 50 ยังคงจำกัดขอบเขตของการคิด (ดูตัวอย่างในภาคผนวก ค หน้า 128) สัดส่วนของจำนวนนักเรียนในแต่ระดับคะแนนที่ได้รับของทั้ง 3 ห้องเรียนใกล้เคียงกัน

ปัญหา “เกมตัดสี่เหลี่ยม”

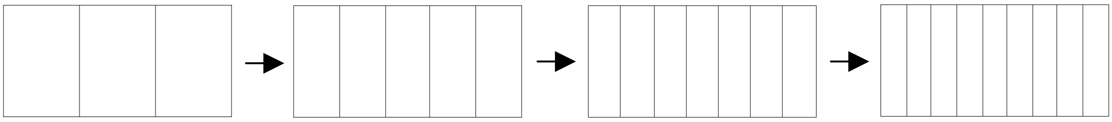
สถานการณ์ของปัญหาบอกว่า วิธีหนึ่งของการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็น 2 ส่วนที่เท่ากันทุกประการทำได้โดยการลากเส้นตรงเพียงเส้นเดียว (ภาพ 33ก) จากนั้น ถามว่า หากต้องลากเส้นตรงแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็น 3 ส่วน 5 ส่วน 7 ส่วนและ 9 ส่วนที่เท่ากันทุกประการ โดยใช้จำนวนเส้นตรงให้น้อยที่สุดในแต่ละกรณี นักเรียนลากเส้นตรงอย่างไร (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ข หน้า 107)

(ก) (ข)

ภาพ 33 การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็น 2 ส่วน และ 9 ส่วน ที่เท่ากัน

การแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็น 9 ส่วนที่เท่ากันทุกประการใช้เส้นตรงน้อยที่สุด 4 เส้น (ดังภาพ 33ข) นักเรียนที่ตอบ 4 เส้นถือว่าสามารถเอาชนะการยึดติดกับขั้นตอนวิธีได้

ส่วนนักเรียนที่ไม่สามารถเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดในข้อนี้จะตอบว่า 8 เส้น เพราะคิดแบบเดียวกับอีก 3 กรณีที่ทำมาก่อนหน้าแล้ว (ภาพ 34)



ภาพ 34 คำตอบที่แสดงการยึดติดกับขั้นตอนวิธีใน “เกมตัดสี่เหลี่ยม”

ตาราง 8 จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนระดับต่าง ๆ สำหรับปัญหา “เกมตัดสี่เหลี่ยม”

ระดับคะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)			
	6/3	6/6	6/7	รวม
0	26	27	6	59
1	3	8	12	23
2	5	3	8	16
3	1	0	2	3
4	6	4	13	23
ประเมินไม่ได้	1	0	2	3
รวม	42	42	43	127

จากตาราง 8 พบว่า นักเรียนประมาณร้อยละ 20 เอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดข้อนี้ได้ ส่วนอีกประมาณร้อยละ 45 ยังคงยึดติดกับขั้นตอนวิธี และดูเหมือนว่านักเรียนห้อง 6/7 จะทำข้อนี้ได้ดีโดยได้คะแนนในทุกระดับมากกว่าอีก 2 ห้อง ยกเว้นระดับคะแนน 0

ปัญหา “เกมทายจำนวน”

สถานการณ์ปัญหา 5 ข้อย่อยเชิญชวนให้นักเรียนค้นหาจำนวน 2 จำนวนที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ข หน้า 108) ข้อย่อยที่ 4 และข้อย่อย 5 เป็นข้อที่นักเรียนต้องเอาชนะโดยไม่จำกัดขอบเขตการคิดอยู่กับจำนวนเต็มบวก ข้อย่อยแต่ละข้อเขียนเป็นสมการและเงื่อนไขได้ดังนี้

ตาราง 9 ปัญหา “เกมทายจำนวน” ในรูปของสมการและเงื่อนไขพร้อมคำตอบ

ข้อย่อย	สถานการณ์ปัญหา	ตัวอย่างคำตอบที่ได้คะแนน
1	x+y = 9 , x > 3 , y > 2	(x=4,y=5) หรือ (x=5, y=4)
2	x+y = 7 , x > 2 , y > 3	(x=3, y=4)
3	x+y = 8 , x > 3 , y > 2	(x=4, y=4) หรือ (x=5, y=3)
4	x+y = 6 , x > 3 , y > 2	(x=3.5, y=2.5)
5	x+y = 6 , x < 3 , y > 5	(x=0, y=6) หรือ (x=0.5, y=5.5)

นักเรียนที่สามารถเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดสามารถค้นหาจำนวน 2 จำนวนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในข้อย่อย 4 และข้อย่อย 5 ได้ โดยต้องขยายขอบเขตการคิดไปยังจำนวนเต็มศูนย์และจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนเต็มในรูปของทศนิยมหรือเศษส่วน

ตาราง 10 จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนระดับต่าง ๆ สำหรับปัญหา “เกมทายจำนวน”

ระดับคะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)			
	6/3	6/6	6/7	รวม
0	13	20	26	59
1	0	0	0	0
2	17	16	7	40
3	0	0	0	0
4	12	6	10	28
ประเมินไม่ได้	0	0	0	0
รวม	42	42	43	127

จากตาราง 10 พบว่า นักเรียนประมาณร้อยละ 20 เอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดข้อนี้ได้ ประมาณร้อยละ 45 ยังคงจำกัดขอบเขตของการคิด ส่วนอีกประมาณร้อยละ 30 สามารถเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดได้บางส่วน

ปัญหา “เกมตวงน้ำ”

สถานการณ์ของปัญหาข้อนี้สั่งให้นักเรียนคิดหาวิธีตวงน้ำที่มีประสิทธิภาพให้ได้ปริมาณน้ำตามกำหนดโดยใช้อุปกรณ์การตวงซึ่งมีความจุแตกต่างกันไปในแต่ละครั้ง (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ข หน้า 109-110) เงื่อนไขของการตวงน้ำแต่ละครั้งเป็นดังนี้

ตาราง 11 เงื่อนไขการตวงน้ำ 6 ครั้ง

ครั้งที่	ความจุของอุปกรณ์การตวง	ปริมาณน้ำที่กำหนด
1	13 ลิตร และ 7 ลิตร	6 ลิตร
2	10 ลิตร และ 6 ลิตร	4 ลิตร
3	9 ลิตร และ 5 ลิตร	4 ลิตร
4	8 ลิตร และ 3 ลิตร	5 ลิตร
5	8 ลิตร และ 4 ลิตร	4 ลิตร
6	10 ลิตร และ 5 ลิตร	5 ลิตร

นักเรียนที่ยึดติดกับขั้นตอนวิธีจะตวงน้ำในครั้งที่ 5 และ 6 ด้วยวิธีการเดียวกับการตวงน้ำสี่ครั้งแรก โดยไม่ได้คิดว่าการตวงน้ำที่มีประสิทธิภาพในสองครั้งสุดท้ายทำได้โดยใช้อุปกรณ์การตวงที่มีความจุเท่ากับปริมาณน้ำที่กำหนดได้ทันที

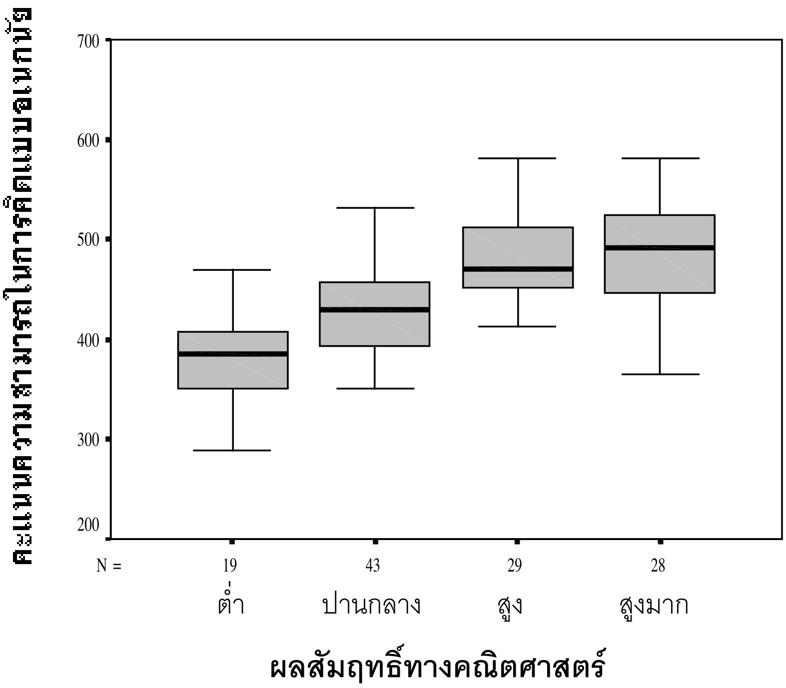
ตาราง 12 จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนระดับต่าง ๆ สำหรับปัญหา “เกมตวงน้ำ”

ระดับคะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)			
	6/3	6/6	6/7	รวม
0	28	23	29	80
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	4	1	5
4	5	10	5	20
ประเมินไม่ได้	9	5	8	22
รวม	42	42	43	127

จากตาราง 12 พบว่า นักเรียนประมาณร้อยละ 15 เอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดข้อนี้ได้ ส่วนอีกประมาณร้อยละ 60 ยังคงยึดติดกับขั้นตอนวิธี (ดูตัวอย่างในภาคผนวก ค หน้า 129) คำตอบที่ไม่สามารถประเมินได้ว่าความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดมีอยู่ประมาณร้อยละ 15

ตอนที่ 3. การเปรียบเทียบความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยระหว่างนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน

เพื่อให้เห็นภาพโดยรวมอย่างคร่าว ๆ ก่อนการเปรียบเทียบ Box-and-whisker plot (ภาพ 35) แสดงให้เห็นว่านักเรียนที่ได้คะแนนสูงสุดอยู่ในกลุ่มสูงมากและกลุ่มสูง นักเรียนที่ได้คะแนนต่ำสุดอยู่ในกลุ่มต่ำ สังเกตว่าช่วงคะแนนของกลุ่มสูงมากกว้างที่สุดและครอบช่วงคะแนนของนักเรียนกลุ่มสูง



ภาพ 35 ช่วงคะแนนความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยของนักเรียน 4 กลุ่ม

ก่อนการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย ผู้วิจัยพิจารณาข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว การทดสอบความเป็นโค้งปกติ (normality) และการทดสอบความเท่าเทียมกันของความแปรปรวน (homogeneity of variances) ยืนยันได้ว่าข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวน จากนั้นจึงดำเนินการต่อโดยการเปรียบเทียบรายคู่ (post hoc comparison) ด้วยการทดสอบแบบ Scheffe ได้ผลดังนี้

ตาราง 13 คะแนนเฉลี่ยความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยของนักเรียนจำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์

ระดับผลสัมฤทธิ์	จำนวน	$\bar{x}$	S.D.	F	p-value
ต่ำ	19	378.47	48.2498	29.142	.000
ปานกลาง	43	430.95	44.7852		
สูง	29	481.14	41.5466		
สูงมาก	28	487.07	47.4872		
รวม	119	448.01	59.2532		

ตาราง 14 การทดสอบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยของนักเรียนจำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์

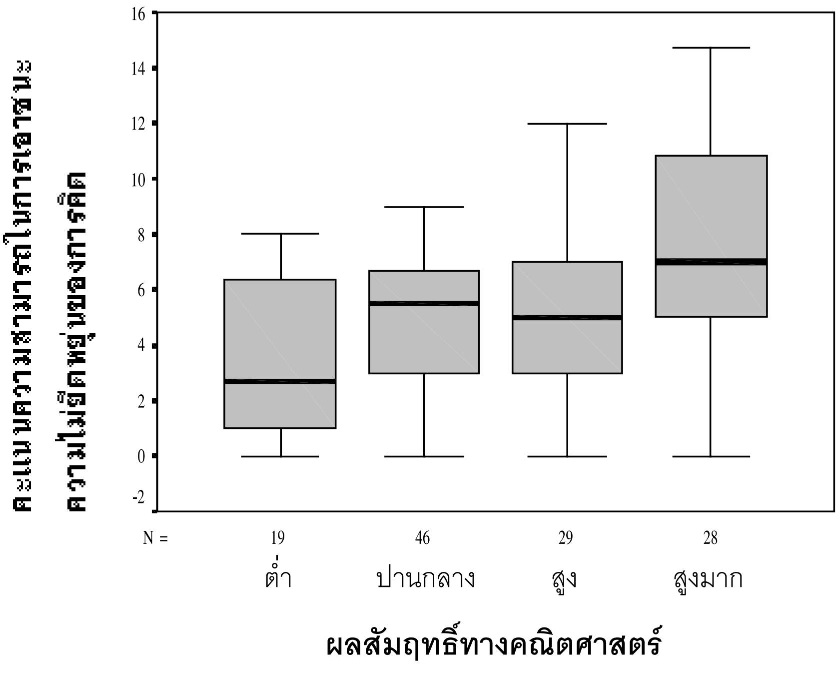
ระดับผลสัมฤทธิ์		ต่ำ	ปานกลาง	สูง	สูงมาก
	คะแนนเฉลี่ย	378.47	430.95	481.14	487.07
ต่ำ	378.47	–			
ปานกลาง	430.95	52.48*	–		
สูง	481.14	102.66*	50.18*	–	
สูงมาก	487.07	108.60*	56.12*	5.93	–

* แตกต่างที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตาราง 13 จะเห็นว่า ความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยเพิ่มขึ้นตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ ค่า $p<0.05$ บ่งบอกว่ามีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยอย่างมีนัยสำคัญอย่างน้อย 1 คู่ และจากการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียวตามตาราง 14 พบว่า นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ต่างกันมีความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ยกเว้นเพียงคู่ของนักเรียนกลุ่มสูงมากกับนักเรียนกลุ่มสูง ซึ่งแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญ

ตอนที่ 4. การเปรียบเทียบความสามารถในการเอาชนะความไม่ยึดหยุ่นของการคิด ระหว่างนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน

เพื่อให้เห็นภาพโดยรวมอย่างคร่าว ๆ ก่อนการเปรียบเทียบ Box-and-whisker plot (ภาพ 36) แสดงให้เห็นช่วงของคะแนนความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดของนักเรียนทั้ง 4 กลุ่ม นักเรียนที่ได้คะแนนสูงสุดอยู่ในกลุ่มสูงมากและกลุ่มสูง แต่นักเรียนที่ได้คะแนนต่ำสุดอยู่ในทุกกลุ่ม สังเกตว่าช่วงคะแนนของนักเรียนกลุ่มสูงกว่าครอบช่วงคะแนนของนักเรียนกลุ่มต่ำกว่าเอาไว้ ไม่มีนักเรียนคนใดในกลุ่มต่ำได้คะแนนความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดสูง แต่คะแนนความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดของนักเรียนกลุ่มสูงพบได้ในทุกระดับ แสดงว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ในระดับดีไม่จำเป็นต้องเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดได้ดีเสมอไป



ภาพ 36 ช่วงคะแนนความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นฯของนักเรียน 4 กลุ่ม

การทดสอบความเป็นโค้งปกติและการทดสอบความเท่าเทียมกันของความแปรปรวนยืนยันได้ว่าข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของการวิเคราะห์ความแปรปรวน ผู้วิจัยดำเนินการต่อโดยการเปรียบเทียบรายคู่ด้วยการทดสอบแบบ Scheffe ได้ผลดังต่อไปนี้

ตาราง 15 คะแนนเฉลี่ยความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดของนักเรียนจำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์

ระดับผลสัมฤทธิ์	จำนวน	$\bar{x}$	S.D.	F	p-value
ต่ำ	19	3.18	2.79	7.578	0.000
ปานกลาง	46	4.97	2.38		
สูง	29	5.29	3.36		
สูงมาก	28	7.30	3.56		
รวม	122	5.30	3.22		

ตาราง 16 การทดสอบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดของนักเรียนจำแนกตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์

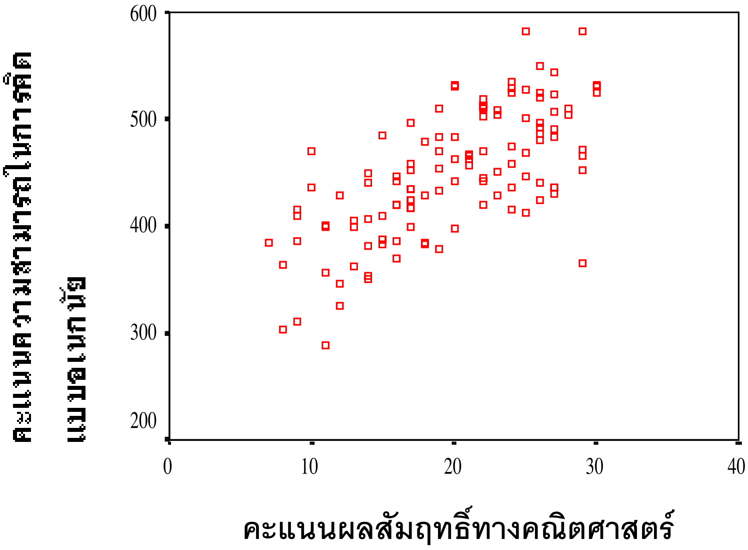
ระดับผลสัมฤทธิ์		ต่ำ	ปานกลาง	สูง	สูงมาก
	คะแนนเฉลี่ย	3.18	4.97	5.29	7.30
ต่ำ	3.18	–			
ปานกลาง	4.97	1.79	–		
สูง	5.29	2.11	0.32	–	
สูงมาก	7.30	4.12*	2.33*	2.01	–

* แตกต่างที่ระดับนัยสำคัญ .05

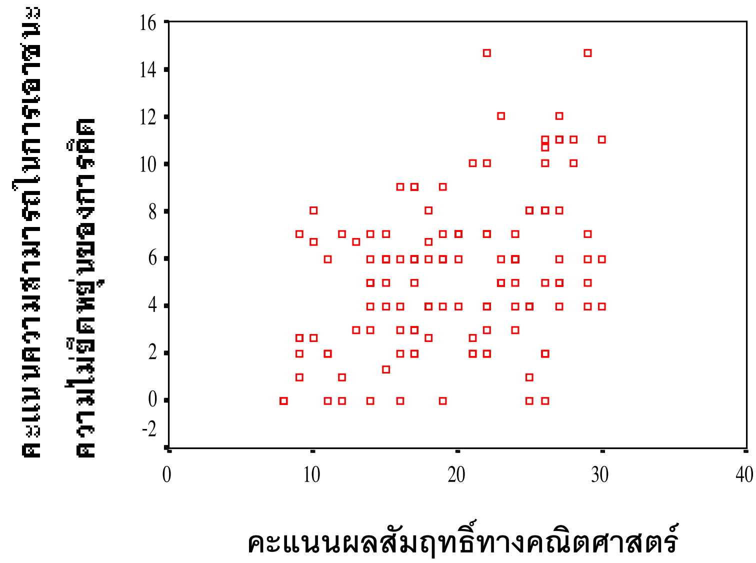
จากตาราง 15 จะเห็นว่า ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดเพิ่มขึ้นตามระดับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ ค่า $p<0.05$ บ่งบอกว่ามีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยอย่างมีนัยสำคัญอย่างน้อย 1 คู่ และจากการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียวตามตาราง 16 พบว่า นักเรียนกลุ่มสูงมากสามารถเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดด้านคณิตศาสตร์ได้ดีกว่านักเรียนกลุ่มต่ำและดีกว่านักเรียนกลุ่มปานกลางอย่างมีนัยสำคัญ ส่วนความแตกต่างในอีกสี่คู่ที่เหลือไม่มีนัยสำคัญ

ตอนที่ 5. ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์

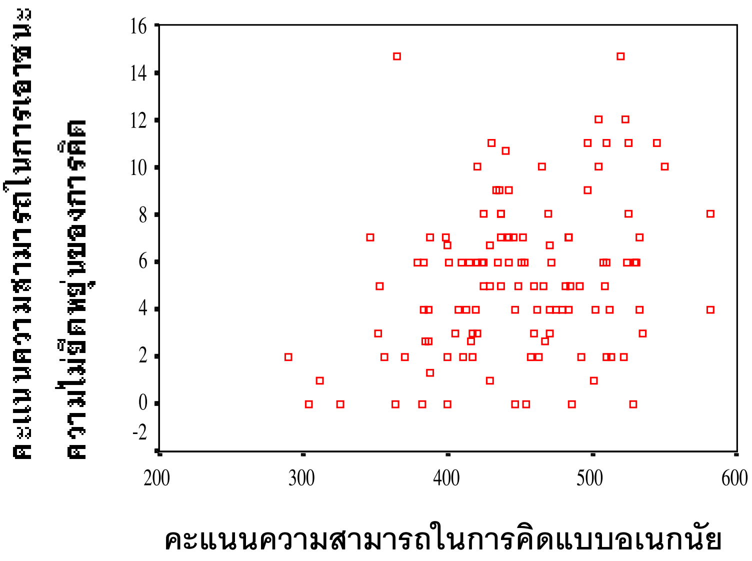
แผนภาพการกระจายของคะแนนความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย การเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์เป็นดังนี้ (ภาพ 37-39)



ภาพ 37 ความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย
กับคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์



ภาพ 38 ความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด
กับคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์



ภาพ 39 ความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความสามารถในการเอาชนะความไม่ยึดหยุ่นของการคิด กับคะแนนความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย

จากแผนภาพการกระจายทั้งสามภาพ ในภาพ 37 ความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยกับคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ดูจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงมากกว่าอีกสองคู่ความสัมพันธ์ (ภาพ 38 และ ภาพ 39) การกระจายของข้อมูลไม่ได้แสดงให้เห็นว่าไม่มีความสัมพันธ์หรือเป็นความสัมพันธ์ลักษณะอื่น ดังนั้นจึงดำเนินการต่อไปโดยการคำนวณหาค่าสหสัมพันธ์เพียร์สันได้ ซึ่งผลเป็นดังนี้

ตาราง 17 สหสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยึดหยุ่นของการคิด และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์

ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถ	n	r
การคิดแบบอเนกนัย กับ ผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์	119	.68**
การเอาชนะความไม่ยึดหยุ่นของการคิด กับ ผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์	122	.39**
การคิดแบบอเนกนัย กับ การเอาชนะความไม่ยึดหยุ่นของการคิด	118	.30**

** มีนัยสำคัญที่ระดับ .01

ตาราง 18 สหสัมพันธ์บางส่วนระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด และผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ (n=116)

ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถ	r
การคิดแบบอเนกนัย กับ ผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ เมื่อควบคุมอิทธิพลของความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด	.64**
การเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด กับ ผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ เมื่อควบคุมอิทธิพลของความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย	.30**
การคิดแบบอเนกนัย กับ การเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด เมื่อควบคุมอิทธิพลของผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์	.03

** มีนัยสำคัญที่ระดับ .01

จากตาราง 17 พบว่า ความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสามเป็นไปในทิศทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทุกคู่ โดยความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ในเกณฑ์ระดับสูงถึงสูงมาก (r=.68) ความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ในเกณฑ์ระดับปานกลางถึงสูง (r=.39) และความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยสัมพันธ์กับความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดในเกณฑ์ระดับต่ำถึงปานกลาง (r=.30)

จากตาราง 18 พบว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์บางส่วนระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยกับความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดเมื่อควบคุมอิทธิพลของผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ (r=.03, p=.73) ซึ่งลดลงจากค่าสหสัมพันธ์เดิม (r=.30) จึงแปลความได้ว่า ความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยไม่มีความสัมพันธ์กับความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด และปริมาณความสัมพันธ์ที่พบระหว่างตัวแปรทั้งสองมีสาเหตุมาจากการมีอยู่ของตัวแปรผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์ข้อมูลเพิ่มเติมช่วยยืนยันว่าข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยกับการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดที่ระบุนั้นน่าจะถูกต้องแล้ว เพราะหากพิจารณาหลักการเปรียบเทียบค่าสหสัมพันธ์บางส่วนกับค่าสหสัมพันธ์เดิมซึ่งตีความตาม de Vaus (2002, p.340) จะได้ข้อสันนิษฐานที่เป็นไปได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัย (X1) กับความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด (X2) เป็นความสัมพันธ์ไม่แท้ (completely spurious) หรือความสัมพันธ์ทางอ้อม

(completely indirect) หรือทั้งสองลักษณะผสมผสานกัน ความสัมพันธ์สองลักษณะแรกดังกล่าวแสดงได้ด้วยแบบจำลองความสัมพันธ์เชิงสาเหตุและผล (causal model) ดังนี้ (X3 แทนผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์)

$$X3 \rightarrow X1 \qquad X3 \rightarrow X2$$

(ก) ความสัมพันธ์ไม่แท้

$$X1 \rightarrow X3 \rightarrow X2$$

หรือ

$$X2 \rightarrow X3 \rightarrow X1$$

(ข) ความสัมพันธ์ทางอ้อม

ภาพ 40 ลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ศึกษา

ความสัมพันธ์ไม่แท้ (ภาพ 40ก) เป็นการอธิบายว่า ค่าสหสัมพันธ์ที่เป็นบวกระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยกับความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดเกิดขึ้นเนื่องจากความสามารถทั้งสองด้านต่างก็ได้รับผลกระทบหรืออิทธิพลจากตัวแปรสาเหตุตัวเดียวกัน (common anteceding cause) ซึ่งก็คือผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ ในกรณีนี้ความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยและความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดแปรผันตรงไปด้วยกันโดยไม่มีความหมายต่อกันอย่างแท้จริง ส่วนความสัมพันธ์ทางอ้อม (แสดงในภาพ 40ข) เป็นการอธิบายว่า ผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์เป็นตัวแปรแทรก (intervening variable) ซึ่งอยู่ตรงกลางของความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยกับความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด

จากการคำนวณเพิ่มเติมโดยใช้ผลจากตาราง 17 ตามวิธีของ Sirkin (1999, pp.489-494) พบว่า $(0.68)\times(0.39) \approx 0.27$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับ 0.30 แต่ $(0.68)\times(0.30) \approx 0.20$ ไม่เท่ากับ 0.39 และ $(0.39)\times(0.30) \approx 0.12$ ไม่เท่ากับ 0.68 จึงตีความได้ว่า คู่ของความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยกับความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดเพียงคู่เดียวเท่านั้นที่อาจมีความสัมพันธ์กันทางอ้อม อย่างไรก็ตาม สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยหากพิจารณาถึงความสมเหตุสมผลแล้ว ความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยหรือความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิดไม่น่าจะเป็นตัวแปรสาเหตุของผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ แต่ในทางกลับกันมีโอกาสเป็นไปได้สูงกว่า กล่าวคือ ผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์เป็นตัวแปรสาเหตุของความสามารถในการคิดแบบอเนกนัยและความสามารถในการเอาชนะความไม่ยืดหยุ่นของการคิด